INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · A. HERTWIG · K. KLOTTER · E. METTLER · K. v. SANDEN
F. SCHLEICHER · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXII. BAND ZWEITES HEFT 1954

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ing.-Archiv

Preis DM 10,40

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. A. Betz, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A
Geh. Reg.-Rat Professor Dr.-Ing. A. Hertwig, Berlin-Wilmersdorf, Sächsische Str. 43
Professor Dr.-Ing. K. Klotter, Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.
Professor Dr. E. **Mettler**, Karlsruhe-Durlach, Rittnertstr. 12
Professor K. v. Sanden, Neureut über Karlsruhe, Rosmarinstraße 11
Professor Dr.-Ing. **F. Schleicher**, Dortmund, Plauener Str. 44
Professor Dr.-Ing. E. Schmidt, Technische Hochschule, München, Walter-von-Dyck-Platz 1
Professor Dr.-Ing. E. Sörensen, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klar verständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 24 / Fernsprecher 24 40 u. 54 30

Berlin W 35
Reichpietschufer 20 / Fernsprecher Sammel-Nr. 24 92 51

Vertriebsvertretung im Ausland:
Lange, Maxwell & Springer Ltd. 242 Marylebone Road, London, N.W. 1.

Inhalt:

Seite

Grammel, R., Der selbsterregte unsymmetrische Kreisel. Mit 8 Textabbildungen 73

Odqvist, F. K. G., Theorie der elastischen Ringe starker Krümmung. Mit 9 Textabbildungen 98

Nickel, K., Über spezielle Systeme von Tragflügelgittern I. (Theorie der tragenden Linie.) Mit 7 Textabbildungen 108

Jindra, F., Einige Anwendungen eines nichtlinearen Elastizitätsgesetzes. Mit 9 Textabbildungen 121

Grammel, R., Bemerkungen zu der Arbeit des Herrn K. Yamada „Vibration of turbine disc in its plane". Proceedings of the Second Japan National Congress for Applied Mechanics 1952, S. 343 145

INGENIEUR-ARCHIV

XXII. BAND ZWEITES HEFT 1954

Der selbsterregte unsymmetrische Kreisel.

Von R. Grammel.

1. Einleitung. Ein starrer Körper, der sich um seinen Schwerpunkt frei drehen kann, soll als selbsterregter Kreisel bezeichnet werden, wenn seine Antriebsdrehkraft nicht von außen kommt, sondern in ihm selbst erzeugt wird (etwa durch Rückstoßvorrichtungen, die aber seine Masse und seine Massenverteilung nicht merklich ändern mögen). Je nachdem der Momentvektor $\mathfrak{M}$ einer solchen Antriebskraft eine feste Lage im Kreisel hat oder sich im Kreisel auf vorgeschriebene Art bewegt, spricht man von achsenfester oder achsenbeweglicher Selbsterregung; und bei achsenfester Selbsterregung wird man dann noch die beiden Fälle unterscheiden müssen, daß der Betrag von $\mathfrak{M}$ zeitlich unveränderlich oder veränderlich ist: zeitunabhängige und zeitabhängige achsenfeste Selbsterregung.

Während nun die Bewegung des achsenfest selbsterregten symmetrischen Kreisels sich durch Quadraturen ausdrücken läßt [1], weiß man über den selbsterregten unsymmetrischen Kreisel bisher nur wenig. Zwar liefern die *Euler*schen Gleichungen zu einem Drehvektor $\mathfrak{v}$, welcher im Kreisel festliegt oder in ihm auf vorgeschriebene Weise wandert, das (i. a. dann weder zeitunabhängige noch achsenfeste) Moment $\mathfrak{M}$ der erforderlichen Drehkraft; aber die umgekehrte Fragestellung, zu einem im Kreisel vorgegebenen Erregungsmoment $\mathfrak{M}$ den Drehvektor $\mathfrak{v}$ zu ermitteln (und daraus vollends in allerdings dann bekannter Weise etwa die *Euler*schen Lagewinkel des Kreisels im Raume), bereitet erhebliche Schwierigkeiten, weil die *Euler*schen Gleichungen den Drehvektor $\mathfrak{v}$ nicht linear enthalten. Schon der klassische *Euler-Poinsot*sche Fall $\mathfrak{M} = 0$ erfordert bekanntlich elliptische Funktionen; die allgemeine Lösung für $\mathfrak{M} \neq 0$ ist meines Wissens bislang nicht einmal für zeitunabhängige achsenfeste Selbsterregung, geschweige denn für zeitabhängige achsenfeste oder für achsenbewegliche Selbsterregung gefunden worden, — ausgenommen den trivialen Fall des Antriebs um eine raumfeste Hauptachse des Trägheitsellipsoids des Kreisels bezüglich seines Schwerpunkts, und weiter ausgenommen die Gesamtheit aller permanenten Drehungen [2] des unsymmetrischen Kreisels, die durch ein zeitunabhängiges achsenfestes Moment zwar nicht erzeugt, aber wenigstens unterhalten werden (man kennt auch das Stabilitätsverhalten solcher permanenten Drehungen und weiß, wie ihre Stabilität notfalls durch geeignete Steuerung der Selbsterregung erzwungen werden kann).

Im folgenden werden wir die allgemeine Lösung für den zeitunabhängig und zeitabhängig achsenfest und den achsenbeweglich selbsterregten unsymmetrischen Kreisel zwar noch nicht vollständig erhalten; wir werden ihr jedoch sukzessiv sehr nahe kommen, sie innerhalb gewisser Konvergenzbereiche erreichen und in einigen Sonderfällen sogar exakt darstellen. Zuerst behandeln wir mit einer iterativen Methode den Fall, daß der Momentvektor $\mathfrak{M}$ der erregenden Drehkraft in der kleinsten oder in der größten Hauptachse des Trägheitsellipsoids bezüglich des Schwerpunkts liegt und der anfängliche Drehvektor $\mathfrak{v}_0$ nur eine kleine Komponente senkrecht zu jener Achse besitzt (Ziff. 2). Dann kommt der Fall, daß der Momentvektor $\mathfrak{M}$ nur schwach von einer jener beiden Achsen abweicht und der anfängliche Drehvektor entweder in jener Achse liegt oder Null ist (Ziff. 3). Eine geeignete Kombination dieser beiden Fälle, die aber wegen des nichtlinearen Gepräges der *Euler*schen Gleichungen keineswegs eine additive Überlagerung sein kann, liefert innerhalb gewisser Konvergenzbereiche die allgemeine Lösung für zeitunabhängig und -abhängig achsenfeste sowie für achsenbewegliche Selbsterregung (Ziff. 4). Alsdann nehmen wir das Problem von Ziff. 2 erneut vor und

[1] Für den zeitunabhängig achsenfest selbsterregten symmetrischen Kreisel hat *U. T. Bödewadt*, Math. Z. 55 (1952), S. 310, die Lösung angegeben; für den zeitabhängig achsenfest selbsterregten symmetrischen Kreisel kann die Lösung in gleicher Weise gefunden werden, nur liegen dann die dabei auftretenden Integralfunktionen i. a. noch nicht tabuliert vor.

[2] *R. Grammel*, Ing.-Arch. 21 (1953), S. 149.

lösen es in exakter Form (Ziff. 5), und zwar auch für einen Momentvektor $\mathfrak{M}$ in der mittleren Hauptachse. Wir werden dabei drei Bewegungstypen kennenlernen: einen periodischen und zwei asymptotische Typen. Da weder diese Lösung noch der Konvergenzbereich der Lösung von Ziff. 4 bis zu den beiden Ebenen der sogenannten trennenden Polbahnen des (zum Trägheitsellipsoid koaxialen) *Poinsot*ellipsoids heranreichen, so behandeln wir weiter den Fall, daß der Drehvektor $\mathfrak{o}$ in diesen Ebenen infolge eines zeitunabhängig achsenfesten Momentes $\mathfrak{M}$ wandert, welches entweder in der mittleren Hauptachse des Trägheitsellipsoids liegt (Ziff. 6) oder in einer bestimmten Weise beliebig stark von ihr abweicht (Ziff. 7). Schließlich beweisen wir noch drei spezielle Sätze: nämlich erstens, daß es (abgesehen von den trivialen Fällen der drei Hauptachsen) keine zeitunabhängige achsenfeste Selbsterregung gibt, welche eine achsenfeste Drehung des Kreisels erzeugen oder vernichten oder beliebig beeinflussen könnte (Ziff. 8); zweitens, daß es (wieder abgesehen von jenen trivialen Fällen) nur eine in ganz bestimmter Weise von der Zeit abhängige achsenfeste Selbsterregung gibt, welche eine zeitabhängige achsenfeste Drehung in ihrer Geschwindigkeit beeinflussen kann (Ziff. 9); und drittens, daß zur Erzeugung einer achsenfesten Drehung (wieder abgesehen von jenen trivialen Fällen) eine achsenbewegliche Selbsterregung nötig ist, deren Momentvektor $\mathfrak{M}$ dabei jedoch stets in einer körperfesten Ebene bleibt (Ziff. 10).

Die für den selbsterregten unsymmetrischen Kreisel zuständigen *Euler*schen Gleichungen lauten

$$\left.\begin{aligned} A\,\dot{\omega}_x - (B-C)\,\omega_y\,\omega_z &= M_x\,,\\ B\,\dot{\omega}_y + (A-C)\,\omega_z\,\omega_x &= M_y\,,\\ C\,\dot{\omega}_z - (A-B)\,\omega_x\,\omega_y &= M_z\,, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

worin A, B, C die Hauptdrehmassen (Hauptträgheitsmomente), ω_x, ω_y, ω_z die Komponenten des Drehvektors $\mathfrak{o}$, ferner M_x, M_y, M_z diejenigen des Momentvektors $\mathfrak{M}$ der erregenden Drehkraft, je in dem körperfesten, rechtshändigen Hauptachsenkreuz (x, y, z) durch den Schwerpunkt, bedeuten. Wir schreiben die Gleichungen (1) mit der Rangordnung

$$A > B > C \tag{2}$$

und den somit positiven Trägheitszahlen

$$\alpha = \frac{B-C}{A} > 0\,, \qquad \beta = \frac{A-C}{B} > 0\,, \qquad \gamma = \frac{A-B}{C} > 0 \tag{3}$$

und den drei Momentgrößen

$$m_x = \frac{M_x}{A}\,, \qquad m_y = \frac{M_y}{B}\,, \qquad m_z = \frac{M_z}{C} \tag{4}$$

zweckmäßig in der Form

$$\dot{\omega}_x - \alpha\,\omega_y\,\omega_z = m_x\,, \tag{5}$$

$$\dot{\omega}_y + \beta\,\omega_z\,\omega_x = m_y\,, \tag{6}$$

$$\dot{\omega}_z - \gamma\,\omega_x\,\omega_y = m_z\,. \tag{7}$$

Zeitunabhängige achsenfeste Selbsterregung liegt vor, wenn M_x, M_y, M_z und also auch m_x, m_y, m_z Festwerte sind, zeitabhängige achsenfeste Selbsterregung, wenn mit einer gemeinsamen Zeitfunktion $F(t)$ und drei Festwerten M_1, M_2, M_3

$$M_x = M_1\,F(t)\,, \qquad M_y = M_2\,F(t)\,, \qquad M_z = M_3\,F(t) \tag{8}$$

ist, endlich achsenbewegliche Selbsterregung, wenn $M_x(t)$, $M_y(t)$, $M_z(t)$ und also auch $m_x(t)$, $m_y(t)$, $m_z(t)$ drei nicht zu einander proportionale Zeitfunktionen sind.

Die (beschleunigten oder verzögerten) Drehungen des Kreisels um eine seiner drei Hauptachsen infolge eines Momentvektors $\mathfrak{M}$ in der gleichen Hauptachse wollen wir weiterhin ein für alle Mal als triviale Fälle ausschließen.

2. Momentvektor in einer Hauptachse; iterative Lösung. Der erste Fall, den wir untersuchen wollen, ist gekennzeichnet durch die Voraussetzungen

$$m_x = \text{konst.} > 0\,, \qquad m_y = 0\,, \qquad m_z = 0\,, \tag{9}$$

das heißt: der achsenfeste Momentvektor $\mathfrak{M}$ soll in der Hauptachse der größten

Drehmasse A (x-Achse) liegen und zunächst z e i t u n a b h ä n g i g sein. Die Voraussetzung, daß m_x positiv sein soll, ist keine Einschränkung der Allgemeinheit, da man die positive Richtung der x-Achse stets entsprechend wählen kann. Von den Anfangswerten ω_{x0}, ω_{y0}, ω_{z0} der Komponenten des Drehvektors zur Zeit $t = 0$ darf dann ω_{x0} positiv, Null oder negativ sein. Damit nicht der triviale Fall vorliegt, müssen wir aber voraussetzen, daß von den beiden anderen Anfangskomponenten ω_{y0} und ω_{z0} mindestens die eine von Null verschieden sei. Und nun ist die wesentliche Voraussetzung, die wir machen müssen, um die Konvergenz des folgenden Verfahrens der sukzessiven Approximation zu ermöglichen,

$$\omega_{y0}^2 \ll m_x, \qquad \omega_{z0}^2 \ll m_x . \tag{10}$$

(Man stellt leicht fest, daß ω_y^2 und ω_z^2 dimensionsgleich mit m_x sind.)

Unsere Voraussetzungen besagen, daß ein um seine erste Hauptachse (x-Achse) durch Selbsterregung dauernd angetriebener Kreisel zur Zeit $t = 0$ einen schwachen seitlichen Drehstoß erhält, der seine Drehachse ein wenig aus der ersten Hauptachse herauswirft, genauer gesagt (wenn man auf die Bedeutung (4) von m_x achtet, und die drei Drehmassen A, B, C als von gleicher Größenordnung ansieht), daß die zusätzliche Bewegungsenergie, die der seitliche Drehstoß dem Kreisel erteilt, klein gegen das (damit dimensionsgleiche) Selbsterregungsmoment bleibt. Wir fragen nach dem weiteren Verhalten des Drehvektors $\mathfrak{o}$.

Wir werden bestätigen, daß infolge der Voraussetzungen (10) das Produkt $|\omega_y \omega_z|$ dauernd klein gegen m_x bleibt. Unterdrücken wir daher dieses Produkt für die e r s t e N ä h e r u n g in (5), so folgt durch Integration

$$\omega_x^{(1)} = \omega_{x0} + m_x t , \tag{11}$$

und damit gehen die Gleichungen (6) und (7) wegen (9) über in

$$\left.\begin{aligned} \dot{\omega}_y^{(1)} + \beta\,(\omega_{x0} + m_x t)\,\omega_z^{(1)} &= 0 , \\ \dot{\omega}_z^{(1)} - \gamma\,(\omega_{x0} + m_x t)\,\omega_y^{(1)} &= 0 , \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

wobei der obere Zeiger bei ω_x, ω_y, ω_z hier und weiterhin jeweils den Grad der Näherung ausdrücken soll.

Man bestätigt leicht, daß die allgemeinen Integrale dieses gekoppelten linearen Systems (12) mit zeitabhängigen Koeffizienten die Gestalt haben

$$\left.\begin{aligned} \omega_y^{(1)} &= \omega_1 \sqrt{\beta}\cos\left[\sqrt{\beta\,\gamma}\,(\omega_{x0} t + \tfrac{1}{2} m_x t^2) + \sigma\right], \\ \omega_z^{(1)} &= \omega_1 \sqrt{\gamma}\sin\left[\sqrt{\beta\,\gamma}\,(\omega_{x0} t + \tfrac{1}{2} m_x t^2) + \sigma\right], \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

wobei die Konstanten ω_1 und σ durch

$$\omega_1^2 = \frac{\omega_{y0}^2}{\beta} + \frac{\omega_{z0}^2}{\gamma} , \tag{14}$$

$$\operatorname{tg}\sigma = \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}\,\frac{\omega_{z0}}{\omega_{y0}} \tag{15}$$

definiert sind, und wobei voraussetzungsgemäß $\omega_1 \neq 0$ ist und die Quadratwurzeln in (13) und (15) als positiv festgesetzt werden dürfen.

Man bestätigt, daß zufolge der Voraussetzung (10) das Produkt $|\omega_y^{(1)}\,\omega_z^{(1)}|$ in der Tat klein gegen m_x ist, so daß seine Vernachlässigung in (5) für die erste Näherung berechtigt war.

Die Deutung dieser ersten Näherung ist einfach. Während die x-Komponente $\omega_x^{(1)}$ (11) des Drehvektors $\mathfrak{o}$ gleichförmig mit der Zeit anwächst, so beschreibt die Pfeilspitze des zusätzlichen (kleinen) Drehvektors $\mathfrak{o}^*$ mit den Komponenten $\omega_y^{(1)}$, $\omega_z^{(1)}$ (13) in der (y,z)-Ebene immer schneller eine Ellipse mit den festen Halbachsen $\omega_1\sqrt{\beta}$ und $\omega_1\sqrt{\gamma}$. Mithin beschreibt der ganze Drehvektor $\mathfrak{o}$ immer schneller einen elliptisch-spiraligen Kegel um die x-Achse mit anwachsenden Mantellinien, derart, daß die Pfeilspitze von $\mathfrak{o}$ auf einem elliptischen Zylinder, dessen Achse die x-Achse ist, und dessen Halbachsen die angegebenen Längen haben, eine räumliche Spirale mit monoton anwachsenden x-Werten aufzeichnet. Demgemäß nähert sich der Winkel zwischen Drehvektor $\mathfrak{o}$ und x-Achse mit immer rascher werdenden Schwankungen asymptotisch dem Wert Null.

Damit ist zugleich gezeigt, daß die Hauptachse der größten Drehmasse A, deren Stabilität meines Wissens bisher nur für die permanenten Drehungen des k r ä f t e f r e i e n unsym-

metrischen Kreisels bewiesen worden ist, auch bei beschleunigtem selbsterregtem Antrieb stabil gegen kleine seitliche Drehstöße bleibt.

Wenn man sich an das *Poinsot*sche Bild der Bewegung des kräftefreien unsymmetrischen Kreisels erinnert [1], so erkennt man leicht, daß die Bewegung des Kreisels, von außen her betrachtet, so verläuft: der Kreisel dreht sich beschleunigt um seine x-Achse, und diese umtanzt immer schneller und immer enger ihre ursprüngliche Raumlage vor der Störung und nähert sich dieser nach der Störung wieder asymptotisch.

Man kann dieses Bild der Bewegung noch verfeinern, wenn man von der ersten zu einer zweiten Näherung übergeht. Hierzu setzt man die gefundenen Werte (13) von $\omega_y^{(1)}$ und $\omega_z^{(1)}$ in die Gleichung (5) ein und erhält so statt (11)

$$\omega_x^{(2)} = \omega_{x0} + m_x t + \tfrac{1}{2}\,\omega_1^2\,\alpha\sqrt{\beta\,\gamma}\,\mathfrak{J}^{(1)}(t) \tag{16}$$

mit der Integralfunktion

$$\mathfrak{J}^{(1)}(t) \equiv \int_0^t \sin 2\left[\sqrt{\beta\,\gamma}\,(\omega_{x0}\,t + \tfrac{1}{2}\,m_x\,t^2) + \sigma\right] dt\,, \tag{17}$$

deren Auswertung wir später nachholen werden. Hiernach gehen die Gleichungen (6) und (7) wegen (9) über in

$$\left.\begin{aligned} \dot{\omega}_y^{(2)} + \beta\,\omega_x^{(2)}\,\omega_z^{(2)} &= 0\,, \\ \dot{\omega}_z^{(2)} - \gamma\,\omega_x^{(2)}\,\omega_y^{(2)} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

mit den allgemeinen Integralen

$$\left.\begin{aligned} \omega_y^{(2)} &= \omega_1\sqrt{\beta}\cos\left[\sqrt{\beta\,\gamma}\,K^{(2)}(t) + \sigma\right], \\ \omega_z^{(2)} &= \omega_1\sqrt{\gamma}\sin\left[\sqrt{\beta\,\gamma}\,K^{(2)}(t) + \sigma\right], \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

welche die weitere Integralfunktion

$$K^{(2)}(t) \equiv \int_0^t \omega_x^{(2)}\,dt = \omega_{x0}\,t + \tfrac{1}{2}\,m_x\,t^2 + \tfrac{1}{2}\,\omega_1^2\,\alpha\sqrt{\beta\,\gamma}\int_0^t \mathfrak{J}^{(1)}(t)\,dt \tag{20}$$

enthalten.

Die dritte Näherung, in gleicher Weise aus der zweiten hergeleitet, lautet

$$\left.\begin{aligned} \omega_x^{(3)} &= \omega_{x0} + m_x t + \tfrac{1}{2}\,\omega_1^2\,\alpha\sqrt{\beta\,\gamma}\,\mathfrak{J}^{(2)}(t)\,, \\ \omega_y^{(3)} &= \omega_1\sqrt{\beta}\cos\left[\sqrt{\beta\,\gamma}\,K^{(3)}(t) + \sigma\right], \\ \omega_z^{(3)} &= \omega_1\sqrt{\gamma}\sin\left[\sqrt{\beta\,\gamma}\,K^{(3)}(t) + \sigma\right] \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

mit

$$\mathfrak{J}^{(2)}(t) \equiv \int_0^t \sin 2\left[\sqrt{\beta\,\gamma}\,K^{(2)}(t) + \sigma\right] dt\,, \tag{22}$$

$$K^{(3)}(t) \equiv \int_0^t \omega_x^{(3)}\,dt = \omega_{x0}\,t + \tfrac{1}{2}\,m_x\,t^2 + \tfrac{1}{2}\,\omega_1^2\,\alpha\sqrt{\beta\,\gamma}\int_0^t \mathfrak{J}^{(2)}(t)\,dt\,, \tag{23}$$

und man sieht nun ohne weiteres, wie die Lösung durch gleichartig fortschreitende Näherungen mehr und mehr verfeinert werden kann. Wesentlich ist dabei, daß in allen diesen Näherungen die Konstanten ω_1 und σ ihre etwa vorgeschriebenen Werte (14) und (15) nicht ändern.

Auch an dem Verlauf der Bewegung ändert sich gegenüber der ersten Näherung nicht mehr viel. Der elliptische Zylinder, der die spiralige Bewegung des anwachsenden Drehvektors $\mathfrak{d}$ begrenzt, bleibt völlig erhalten, und nur das, was wir vorhin als zeitliches Schwanken bezeichnet haben, wird durch die weiteren Näherungen verfeinert wiedergegeben: dieses Schwanken wird nun schon in der Hauptkomponente ω_x des Drehvektors $\mathfrak{d}$ berücksichtigt, und zwar immer genauer mit jeder weiteren Näherung, und überträgt sich dann natürlich auch auf den zeitlichen Ablauf der Nebenkomponenten ω_y und ω_z von $\mathfrak{d}$. Der elliptische Zylinder hat übrigens das gleiche Halbachsenverhältnis $\sqrt{\beta/\gamma} = \sqrt{C\,(A-C)/B\,(A-B)}$ wie schon beim kräftefreien Kreisel, bei welchem er die Polbahn, die die x-Achse umschließt, aus dem *Poinsot*ellipsoid ausschneidet [2].

[1] Siehe etwa *R. Grammel*, Der Kreisel Bd. 1, S. 125, 2. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1950.
[2] Siehe *R. Grammel*, Der Kreisel Bd. 1, S. 131.

Jetzt ist noch nachzutragen, daß wenigstens die in der zweiten Näherung auftretende Integralfunktion $\mathfrak{J}^{(1)}(t)$ (17) sich auf bekannte Funktionen zurückführen läßt, nämlich auf die *Fresnel*schen Integrale, welche in der Form

$$C(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\xi} \frac{\cos \xi}{\sqrt{\xi}}\, d\xi\,, \qquad S(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\xi} \frac{\sin \xi}{\sqrt{\xi}}\, d\xi \tag{24}$$

tabuliert sind[1]. Man transformiert $\mathfrak{J}^{(1)}(t)$ auf eine neue (dimensionslose) Zeitvariable ξ und ihren Nullwert ξ_0:

$$\xi = m_x \sqrt{\beta\,\gamma}\left(t + \frac{\omega_{x_0}}{m_x}\right)^2, \qquad \xi_0 = \sqrt{\beta\,\gamma}\,\frac{\omega_{x_0}^2}{m_x} \tag{25}$$

und hat dann zunächst

$$\mathfrak{J}^{(1)}(t) = k \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\sin(\xi - \xi_0 + 2\sigma)}{\sqrt{2\pi\xi}}\, d\xi \tag{26}$$

mit

$$k = \sqrt{\frac{\pi}{2\, m_x \sqrt{\beta\,\gamma}}} \tag{27}$$

und also schließlich

$$\mathfrak{J}^{(1)}(t) = k\left\{[S(\xi) - S(\xi_0)]\cos(\xi_0 - 2\sigma) - [C(\xi) - C(\xi_0)]\sin(\xi_0 - 2\sigma)\right\}. \tag{28}$$

Auf die mögliche Auswertung auch der Funktion $K^{(2)}$ (20) wollen wir hier nicht weiter eingehen[2].

In genau der gleichen Weise kann man den Fall durchrechnen, daß der Momentvektor $\mathfrak{M}$ in der Hauptachse der kleinsten Drehmasse C (z-Achse) liegt, und daß der Drehvektor $\mathfrak{o}$ anfänglich eine kleine Komponente senkrecht zu dieser Achse besitzt. Offenbar braucht man in den bisherigen Ergebnissen lediglich die Buchstaben entsprechend zu vertauschen. Außerdem ist so dargetan, daß die Hauptachse der kleinsten Drehmasse C auch bei beschleunigtem selbsterregtem Antrieb ihre vom kräftefreien Kreisel her bekannte Stabilität beibehält.

Dagegen läßt sich der Fall, daß der Momentvektor $\mathfrak{M}$ in der Achse der mittleren Hauptdrehmasse B (y-Achse) liegt und der Drehvektor $\mathfrak{o}$ anfänglich eine kleine Komponente senkrecht zu dieser Achse besitzt, nicht auf diese Art behandeln, weil dann, wie man leicht erkennt, die (beschränkten) Kreisfunktionen cos und sin durch die unbeschränkt anwachsenden Hyperbelfunktionen Cof und Sin zu ersetzen wären, im Gegensatz zu der Annahme (auf der die Rechnung doch beruhen würde), daß die anfänglich kleinen Komponenten ω_x und ω_z in der Gleichung (6) dauernd klein bleiben sollen. Hiermit ist zugleich die Erkenntnis gewonnen, daß die mittlere Hauptachse, die schon beim kräftefreien unsymmetrischen Kreisel eine labile Drehachse vorstellt, auch bei beschleunigtem selbsterregtem Antrieb labil bleibt.

Wie weit sich der Konvergenzbereich unserer Rechnungen für die beiden Fälle erstreckt, daß der Momentvektor $\mathfrak{M}$ in der x- bzw. z-Achse liegt, d. h. für welche Werte ω_{y0}, ω_{z0} bzw. ω_{x0}, ω_{y0} unsere sukzessiven Näherungen gegen die exakte Lösung konvergieren, lasse ich hier unerörtert. Der Gang der Rechnung läßt vermuten, daß dieser Konvergenzbereich ziemlich groß sein wird, weil jeder weitere Näherungsschritt immer nur Verbesserungen von der Größenordnung ω_1^2 aufzeigt.

Formal läßt sich die ganze Rechnung sofort auf den viel allgemeineren Fall der zeitabhängigen achsenfesten Selbsterregung erweitern, wobei also m_x nicht mehr ein Festwert, sondern eine vorgeschriebene Funktion der Zeit ist. Offenbar hat man dann überall die Ausdrücke $m_x\, t$ und $\frac{1}{2}\, m_x\, t^2$ zu ersetzen durch die Integrale

$$\int_0^t m_x(t)\, dt\,, \qquad \int_0^t \int_0^t m_x(t)\, dt^2\,,$$

und ganz Entsprechendes gilt für ein zeitabhängiges $m_z(t)$. Aber natürlich muß man nun bezüglich der Konvergenz überhaupt und insbesondere bezüglich einer guten Konvergenz in der Auswahl der Funktionen $m_x(t)$ bzw. $m_z(t)$ vorsichtig sein.

---

[1] *Jahnke-Emde*, Tafeln höherer Funktionen S. 36, 4. Aufl. Leipzig 1948.

[2] Vgl. *W. Magnus* u. *F. Oberhettinger*, Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, S. 127, 2. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1948.

Wir werden auf das hier durch Iteration gelöste Problem wenigstens für zeitunabhängige Selbsterregung in Ziff. 5 noch einmal zurückkommen und dann auch noch eine geschlossene exakte Lösung aufsuchen; und diese wird zeigen, daß die Mannigfaltigkeit der Bewegungsformen größer ist, als die [an die Voraussetzungen (10) gebundene] iterative Lösung angeben konnte.

3. Momentvektor nahezu in einer Hauptachse. Während bisher der Momentvektor $\mathfrak{M}$ genau in einer Hauptachse lag (und zwar entweder in der x- oder z-Achse, aber nicht in der y-Achse), der anfängliche Drehvektor $\mathfrak{o}_0$ aber von ihr abweichen durfte, so wenden wir uns nun dem Gegenstück zu, nämlich dem Falle, daß der anfängliche Drehvektor $\mathfrak{o}_0$ genau in einer Hauptachse liegt (einschließlich des Sonderfalles, daß er Null ist), zunächst in der x-Achse, also mit den Komponenten ω_{x0}, 0, 0 (einschließlich des Sonderwertes $\omega_{x0} = 0$), daß dagegen der achsenfeste Momentvektor, zunächst zeitunabhängig, von der x-Achse schwach abweicht. Wir bezeichnen demgemäß die drei Momentgrößen (4) mit m_x und

$$m_y = \mu_2 m_x , \qquad m_z = \mu_3 m_x , \tag{29}$$

wobei μ_2 und μ_3 hinreichend kleine Zahlen sein sollen. Wir wollen und dürfen m_x wieder als positiv voraussetzen, wogegen μ_2 und μ_3 positiv oder negativ sein können (aber nicht beide Null sein mögen, damit nicht der triviale Fall vorliegt).

Auch hier wird sich die Vermutung, daß alsdann $|\omega_y \omega_z|$ dauernd klein gegen m_x bleibt, durch die weitere Rechnung bestätigen, und somit unterdrücken wir für die erste Näherung wiederum das Produkt $\omega_y \omega_z$ in (5) und erhalten für $\omega_x^{(1)}$ das frühere Integral (11), so daß die Gleichungen (6) und (7) mit (29) übergehen in

$$\left.\begin{aligned} \dot{\omega}_y^{(1)} + \beta\,(\omega_{x0} + m_x t)\,\omega_z^{(1)} &= \mu_2 m_x , \\ \dot{\omega}_z^{(1)} - \gamma\,(\omega_{x0} + m_x t)\,\omega_y^{(1)} &= \mu_3 m_x . \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Ihre an die Anfangsbedingungen

$$\omega_y = 0 , \qquad \omega_z = 0 \qquad \text{für} \quad t = 0 \tag{31}$$

angepaßten Integrale lauten, wie man durch Einsetzen bestätigt,

$$\left.\begin{aligned} \omega_y^{(1)} = {} & m_x \left[\mu_2 \mathfrak{J}_c^{(1)}(t) + \mu_3 \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}\, \mathfrak{J}_s^{(1)}(t)\right] \cos\left[\sqrt{\beta\gamma}\left(\omega_{x0} t + \frac{1}{2} m_x t^2\right)\right] + \\ & + m_x \left[\mu_2 \mathfrak{J}_s^{(1)}(t) - \mu_3 \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}\, \mathfrak{J}_c^{(1)}(t)\right] \sin\left[\sqrt{\beta\gamma}\left(\omega_{x0} t + \frac{1}{2} m_x t^2\right)\right] , \\ \omega_z^{(1)} = {} & - m_x \left[\mu_2 \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}\, \mathfrak{J}_s^{(1)}(t) - \mu_3 \mathfrak{J}_c^{(1)}(t)\right] \cos\left[\sqrt{\beta\gamma}\left(\omega_{x0} t + \frac{1}{2} m_x t^2\right)\right] + \\ & + m_x \left[\mu_2 \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}\, \mathfrak{J}_c^{(1)}(t) + \mu_3 \mathfrak{J}_s^{(1)}(t)\right] \sin\left[\sqrt{\beta\gamma}\left(\omega_{x0} t + \frac{1}{2} m_x t^2\right)\right] \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

mit den Integralfunktionen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{J}_c^{(1)}(t) &\equiv \int_0^t \cos\left[\sqrt{\beta\gamma}\,(\omega_{x0} t + \tfrac{1}{2} m_x t^2)\right] dt , \\ \mathfrak{J}_s^{(1)}(t) &\equiv \int_0^t \sin\left[\sqrt{\beta\gamma}\,(\omega_{x0} t + \tfrac{1}{2} m_x t^2)\right] dt , \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

welche man in gleicher Weise wie (17) auf die tabulierten *Fresnel*schen Integrale (24) zurückführen kann. Mit

$$\xi' = \frac{1}{2} m_x \sqrt{\beta\gamma}\left(t + \frac{\omega_{x0}}{m_x}\right)^2 , \qquad \xi_0' = \frac{1}{2}\sqrt{\beta\gamma}\,\frac{\omega_{x0}^2}{m_x} \tag{34}$$

und

$$k' = \sqrt{\frac{\pi}{m_x \sqrt{\beta\gamma}}} \tag{35}$$

findet man

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{J}_c^{(1)}(t) &= k' \{[C(\xi') - C(\xi_0')] \cos \xi_0' + [S(\xi') - S(\xi_0')] \sin \xi_0'\} , \\ \mathfrak{J}_s^{(1)}(t) &= k' \{[S(\xi') - S(\xi_0')] \cos \xi_0' - [C(\xi') - C(\xi_0')] \sin \xi_0'\} . \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Weil die *Fresnel*schen Integrale für alle Argumente nicht nur beschränkt sind, sondern sogar kleiner als 1 bleiben und sich mit wachsendem Argument in immer kleiner werdenden Schwan-

kungen dem Wert 1/2 nähern, so bleiben auch $|\omega_y^{(1)}|$ und $|\omega_z^{(1)}|$ gemäß (32) und (36) beschränkt und wegen der kleinen Faktoren μ_2 und μ_3 dauernd klein, und zwar bleibt ihr Produkt in der Tat klein gegen m_x, wie man erkennt, wenn man auf den Faktor $k' \sim 1/\sqrt{m_x}$ in $\mathfrak{Z}_c^{(1)}$ und $\mathfrak{Z}_s^{(1)}$ (36) achtet.

Wenn man (32) in der einfachen Form

$$\omega_y^{(1)} = m_x\,[c_1 \cos\varphi(t) + c_2 \sin\varphi(t)]\,,$$

$$\omega_z^{(1)} = m_x \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}\,[c_1 \sin\varphi(t) - c_2 \cos\varphi(t)]$$

schreibt, mit den Abkürzungen

$$\varphi(t) \equiv \sqrt{\beta\,\gamma}\,(\omega_{x0}\,t + \tfrac{1}{2}\,m_x\,t^2)\,, \tag{37}$$

$$\left.\begin{aligned} c_1(t) &\equiv \mu_2\,\mathfrak{Z}_c^{(1)}(t) + \mu_3 \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}\,\mathfrak{Z}_s^{(1)}(t)\,, \\ c_2(t) &\equiv \mu_2\,\mathfrak{Z}_s^{(1)}(t) - \mu_3 \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}\,\mathfrak{Z}_c^{(1)}(t) \end{aligned}\right| \tag{38}$$

und dann noch

$$c_1(t) \equiv h(t)\cos\sigma'(t)\,, \qquad c_2(t) \equiv h(t)\sin\sigma'(t)$$

setzt, so daß

$$h^2 \equiv c_1^2 + c_2^2 \equiv \left(\mu_2^2 + \mu_3^2\,\frac{\beta}{\gamma}\right)(\mathfrak{Z}_c^{(1)2} + \mathfrak{Z}_s^{(1)2})\,, \tag{39}$$

$$\operatorname{tg}\sigma' \equiv \frac{c_2}{c_1} \tag{40}$$

wird, so nehmen die beiden zusätzlichen Drehkomponenten $\omega_y^{(1)}$ und $\omega_z^{(1)}$, die zu $\omega_x^{(1)}$ hinzukommen, die Gestalt an

$$\left.\begin{aligned} \omega_y^{(1)} &= m_x\,h\cos(\varphi - \sigma')\,, \\ \omega_z^{(1)} &= m_x\,h\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}\sin(\varphi - \sigma')\,, \end{aligned}\right| \tag{41}$$

wobei $h(t)$ gemäß (39) eine Funktion von klein bleibendem Betrag ist.

Demgemäß überstreicht der zusätzliche Drehvektor $\mathfrak{d}^*$ mit den Komponenten $\omega_y^{(1)}$, $\omega_z^{(1)}$ in der (y, z)-Ebene eine Ellipse mit den zeitlich pulsierenden Halbachsen $m_x\,h$ und $m_x\,h\sqrt{\gamma/\beta}$, und zwar mit einer Umlaufgeschwindigkeit, die nach (37) im ganzen mehr und mehr zunimmt, jedoch nach (40) von zeitlichen Schwankungen überlagert ist. Man wird sich so nun auch wieder den zeitlichen Ablauf des wachsenden Gesamtdrehvektors $\mathfrak{d}(\omega_x^{(1)}, \omega_y^{(1)}, \omega_z^{(1)})$ wenigstens qualitativ gut vorstellen können. Die Halbachsen des pulsierenden elliptischen Zylinders, innerhalb dessen der Drehvektor $\mathfrak{d}$ im Kreisel sich vergrößert, nähern sich schwankend asymptotisch den festen Werten

$$\left.\begin{aligned} a_\infty &= m_x\,k'\sqrt{\left(\mu_2^2 + \mu_3^2\,\frac{\beta}{\gamma}\right)R}\,, \\ b_\infty &= m_x\,k'\sqrt{\left(\mu_2^2\,\frac{\gamma}{\beta} + \mu_3^2\right)R}\,, \end{aligned}\right| \tag{42}$$

wobei zur Abkürzung

$$R = [\tfrac{1}{2} - C(\xi_0')]^2 + [\tfrac{1}{2} - S(\xi_0')]^2 \tag{43}$$

gesetzt ist.

Auch hier kann man diese erste Näherung durch beliebig weit vorgetriebene Näherungen höheren Grades verbessern und verfeinern. Die zweite Näherung benützt die Werte (32) von $\omega_y^{(1)}$ und $\omega_z^{(1)}$ in der Gleichung (5), so daß man statt (11)

$$\omega_x^{(2)} = \omega_{x0} + m_x\,t + \alpha\int_0^t \omega_y^{(1)}\,\omega_z^{(1)}\,dt \tag{44}$$

erhält und damit statt (30)

$$\left.\begin{aligned} \dot\omega_y^{(2)} + \beta\,\omega_x^{(2)}\,\omega_z^{(2)} &= \mu_2\,m_x\,, \\ \dot\omega_z^{(2)} - \gamma\,\omega_x^{(2)}\,\omega_y^{(2)} &= \mu_3\,m_x \end{aligned}\right| \tag{45}$$

samt den an die Anfangsbedingungen (31) angepaßten Integralen

$$\left.\begin{aligned}
\omega_y^{(2)} = {} & m_x\left[\mu_2\,\mathfrak{J}_c^{(2)}(t) + \mu_3\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}\;\mathfrak{J}_s^{(2)}(t)\right]\cos\left[\sqrt{\beta\,\gamma}\;K^{(2)}(t)\right] + \\
& + m_x\left[\mu_2\,\mathfrak{J}_s^{(2)}(t) - \mu_3\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}\;\mathfrak{J}_c^{(2)}(t)\right]\sin\left[\sqrt{\beta\,\gamma}\;K^{(2)}(t)\right], \\
\omega_z^{(2)} = {} & - m_x\left[\mu_2\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}\;\mathfrak{J}_s^{(2)}(t) - \mu_3\,\mathfrak{J}_c^{(2)}(t)\right]\cos\left[\sqrt{\beta\,\gamma}\;K^{(2)}(t)\right] + \\
& + m_x\left[\mu_2\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}\;\mathfrak{J}_c^{(2)}(t) + \mu_3\,\mathfrak{J}_s^{(2)}(t)\right]\sin\left[\sqrt{\beta\,\gamma}\;K^{(2)}(t)\right],
\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

worin

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{J}_c^{(2)}(t) &\equiv \int_0^t \cos\left[\sqrt{\beta\,\gamma}\;K^{(2)}(t)\right]dt, \\
\mathfrak{J}_s^{(2)}(t) &\equiv \int_0^t \sin\left[\sqrt{\beta\,\gamma}\;K^{(2)}(t)\right]dt
\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

und

$$K^{(2)}(t) \equiv \int_0^t \omega_x^{(2)}\,dt \tag{48}$$

ist.

Für die weiteren Näherungen hat man in diesen Formeln lediglich die oberen Zeiger bei ω_x, ω_y, ω_z, $\mathfrak{J}_c$, $\mathfrak{J}_s$ und K, beginnend mit (44), jeweils um eine Einheit zu erhöhen.

Man darf in allen Formeln von (30) bis (48) ohne weiteres auch $\omega_{x0} = 0$ setzen, wobei dann insbesondere in (43) $R = \frac{1}{2}$ wird, und hat so den Fall, daß der Kreisel von der Ruhe aus durch eine Drehkraft angetrieben wird, deren Momentvektor $\mathfrak{M}$ mit der x-Achse einen hinreichend kleinen Winkel bildet.

Ferner macht es keine Schwierigkeiten, die ganze Rechnung auf einen zeitabhängigen achsenfesten Momentvektor $\mathfrak{M}$ zu verallgemeinern, also m_x als gegebene Zeitfunktion anzusetzen, womit dann zufolge (29) auch m_y und m_z sich in gleicher Weise zeitlich ändern. Man muß dann nämlich nur die bisherige Konstante m_x als Zeitfunktion $m_x(t)$ bei ω_x behandeln und sie bei ω_y und ω_z in die Integrale $\mathfrak{J}_c^{(j)}$ und $\mathfrak{J}_s^{(j)}$ mit hereinnehmen und hat also als erste Näherung

$$\left.\begin{aligned}
\omega_x^{(1)} &= \omega_{x0} + \int_0^t m_x(t)\,dt, \\
\omega_y^{(1)} &= \left[\mu_2\,\mathfrak{J}_c^{(1)*}(t) + \mu_3\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}\;\mathfrak{J}_s^{(1)*}(t)\right]\cos\left[\sqrt{\beta\,\gamma}\left(\omega_{x0}t + \int_0^t m_x(t)\,dt\right)\right] + \\
&\quad + \left[\mu_2\,\mathfrak{J}_s^{(1)*}(t) - \mu_3\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}\;\mathfrak{J}_c^{(1)*}(t)\right]\sin\left[\sqrt{\beta\,\gamma}\left(\omega_{x0}t + \int_0^t m_x(t)\,dt\right)\right], \\
\omega_z^{(1)} &= -\left[\mu_2\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}\;\mathfrak{J}_s^{(1)*}(t) - \mu_3\,\mathfrak{J}_c^{(1)*}(t)\right]\cos\left[\sqrt{\beta\,\gamma}\left(\omega_{x0}t + \int_0^t m_x(t)\,dt\right)\right] + \\
&\quad + \left[\mu_2\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}\;\mathfrak{J}_c^{(1)*}(t) + \mu_3\,\mathfrak{J}_s^{(1)*}(t)\right]\sin\left[\sqrt{\beta\,\gamma}\left(\omega_{x0}t + \int_0^t m_x(t)\,dt\right)\right]
\end{aligned}\right\} \tag{49}$$

mit den Integralfunktionen

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{J}_c^{(1)*}(t) &\equiv \int_0^t m_x(t)\cos\left[\sqrt{\beta\,\gamma}\left(\omega_{x0}t + \int_0^t m_x(t)\,dt\right)\right]dt, \\
\mathfrak{J}_s^{(1)*}(t) &\equiv \int_0^t m_x(t)\sin\left[\sqrt{\beta\,\gamma}\left(\omega_{x0}t + \int_0^t m_x(t)\,dt\right)\right]dt.
\end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Die zweite Näherung geht aus den Formeln (44) bis (48) hervor, wenn man in (44) $m_x t$ ersetzt durch $\int_0^t m_x(t)\,dt$ und in (46) den Faktor m_x unterdrückt und ihn dafür in die Integranden der Funktionen (47) hereinnimmt, wie das schon in (50) geschah. Entsprechendes gilt für die weiteren Näherungen.

Man erkennt, daß dieses Verfahren sogar auf achsenbewegliche Selbsterregung angewandt werden kann. Man muß dann eben auch die nunmehr zeitabhängigen μ_2 und μ_3 in die Integranden der Funktionen (47), (50) usw. hereinnehmen [wo man sie natürlich mit m_x zu $\mu_2 m_x = m_y(t)$ und $\mu_3 m_x = m_z(t)$ vereinigt].

Auch hier kann man alle Ergebnisse sofort auf den Fall übertragen, daß der Momentvektor $\mathfrak{M}$ der Antriebsdrehkraft in der Nähe der Achse der kleinsten Hauptdrehmasse (z-Achse) liegt. Dagegen versagt die Rechnung bei Momentvektoren in der Nähe der mittleren Hauptachse aus dem gleichen Grunde wie in Ziff. 2.

4. Die allgemeine iterative Lösung. Zieht man den kräftefreien unsymmetrischen Kreisel zum Vergleich heran, so umfassen die iterativen Lösungen von Ziff. 2 und 3 für den selbsterregten Kreisel diejenigen Bewegungen, deren Drehvektoren $\mathfrak{d}$ in der Umgebung der kleinsten und der größten Hauptachse des Trägheitsellipsoids verlaufen, was also den Polbahnen erster und zweiter Art in der Nachbarschaft jener beiden Achsen beim kräftefreien Kreisel entspricht. Wie groß diese beiden Bereiche sind, hängt lediglich von der Konvergenz unserer Rechnungen ab, die nicht leicht abzugrenzen ist, sicherlich in der Nähe jener beiden Achsen gut sein wird, aber ebenso gewiß nicht bis zur mittleren Hauptachse reicht.

Allerdings sind die Lösungen von Ziff. 2 und 3 insofern noch von spezieller Art, als in Ziff. 2 der Momentvektor $\mathfrak{M}$ genau in eine jener beiden Hauptachsen fällt, und als in Ziff. 3 der anfängliche Drehvektor $\mathfrak{d}_0$ entweder genau in die zugehörige Hauptachse fällt oder verschwindet. Man kann nun aber — vermutlich innerhalb des gemeinsamen Konvergenzbereiches unserer Rechnungen von Ziff. 2 und 3 — den allgemeinen Fall, daß der Momentvektor $\mathfrak{M}$ und der anfängliche Drehvektor $\mathfrak{d}_0$ beide nicht genau in einer jener beiden Hauptachsen, sondern wenigstens innerhalb eines Zylinders liegen, der die betreffende Achse hinreichend eng umgibt, offenbar durch eine geeignete Kombination der Lösungen von Ziff. 2 und 3 erhalten.

Weil die ursprünglichen, exakten Gleichungen (6) und (7) in (30) linearisiert sind, so kann man ihrer Lösung (32) die Lösung (13) der verkürzten Gleichungen (12) additiv hinzufügen und hat dann in ihrer Summe, die wir mit $\bar{\omega}_y^{(1)}$ und $\bar{\omega}_z^{(1)}$ bezeichnen wollen, zusammen mit $\omega_x^{(1)}$ (11) die erste Näherung der allgemeinen Lösung (in der Umgebung jener beiden Hauptachsen). Für die zweite Näherung hat man dann in (44) die Werte $\bar{\omega}_y^{(1)}$ und $\bar{\omega}_z^{(1)}$ statt $\omega_y^{(1)}$ und $\omega_z^{(1)}$ einzuführen und wiederum zu der mit diesem Wert $\bar{\omega}_x^{(2)}$ gebildeten Lösung (46) die Lösung (19), ebenfalls mit diesem Wert $\bar{\omega}_x^{(2)}$ gebildet [also mit $\bar{\omega}_x^{(2)}$ statt $\omega_x^{(2)}$ in $K^{(2)}(t)$ (20)], additiv hinzuzufügen. Ganz entsprechend verfährt man bei den weiteren Näherungen; wir brauchen die Formeln nicht explizit anzuschreiben, da sie sich nach der jetzt deutlich erklärten Vorschrift aus unseren früheren Formeln von selbst ergeben.

Weil zu vermuten ist, daß der Konvergenzbereich dieser Rechnungen „in der Nähe" der kleinsten und der größten Hauptachse keineswegs sehr eng ist, so haben wir mit dieser kombinierten Lösung wahrscheinlich einen erheblichen Teil der allgemeinen Lösung des Problems des achsenfest zeitunabhängig oder zeitabhängig und sogar des achsenbeweglich selbsterregten unsymmetrischen Kreisels gefunden. Sie besitzt auch dieselbe ∞^6-fache Mannigfaltigkeit wie die allgemeine Lösung selbst (bezüglich der Anfangslage und des Anfangswertes des Drehvektors $\mathfrak{d}$ und bezüglich der Lage und Größe des Momentvektors $\mathfrak{M}$ der erregenden Drehkraft).

Wir wollen die Bewegungen, die mit dieser iterativen Lösung darstellbar sind, als asymptotische Bewegungen erster Art des selbsterregten unsymmetrischen Kreisels bezeichnen, weil bei ihnen der Drehvektor $\mathfrak{d}$ mit $t \to \infty$ über alle Grenzen wachsend sich asymptotisch der x- bzw. z-Achse nähert. Daneben ist, wie die Ergebnisse von Ziff. 5 zeigen werden, noch ein zweiter Typ von asymptotischen Bewegungen zu erwarten, bei denen sich der Drehvektor asymptotisch einem endlichen Grenzvektor nähert. Diese asymptotischen Bewegungen zweiter Art können mit der geschilderten iterativen Methode nicht dargestellt werden.

5. Momentvektor in einer Hauptachse; exakte Lösung. Wie schon am Schluß von Ziff. 2 angekündigt, wollen wir nun für die drei Fälle, daß der Momentvektor $\mathfrak{M}$ in einer der drei Hauptachsen liegt, der Drehvektor $\mathfrak{d}$ aber anfänglich davon abweicht — und zwar jetzt beliebig stark davon abweichen darf —, auch noch eine exakte Lösung in geschlossener Form angeben, wobei wir uns auf zeitunabhängige Momentvektoren beschränken.

Wir beginnen mit dem Fall $m_x \neq 0$, $m_y = m_z = 0$ eines Momentvektors in der x-Achse und bezeichnen die beliebigen Anfangskomponenten des Drehvektors $\mathfrak{d}$ wieder mit ω_{x0}, ω_{y0}, ω_{z0} Der Schlüssel zur exakten Lösung besteht darin, daß man die Variable

$$\varphi_x = \int_0^t \omega_x \, dt \tag{51}$$

einführt, welche allerdings keine kinematische Bedeutung (etwa als Drehwinkel) hat, weil ω_x nur eine Komponente des Drehvektors $\mathfrak{d}$ ist, und weil dieser zudem im Körper wandern kann. Mit (51) und $m_y = m_z = 0$ haben die beiden Gleichungen (6) und (7) die allgemeinen Integrale

$$\left.\begin{aligned} \omega_y &= \omega_1 \sqrt{\beta} \cos\left(\sqrt{\beta\,\gamma}\,\varphi_x + \sigma\right), \\ \omega_z &= \omega_1 \sqrt{\gamma} \sin\left(\sqrt{\beta\,\gamma}\,\varphi_x + \sigma\right), \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

wobei ω_1 und σ die früheren, durch (14) und (15) definierten Abkürzungen sind und voraussetzungsgemäß auch hier $\omega_1 \neq 0$ ist; die Quadratwurzeln in (52) darf man wieder als positiv festsetzen.

Um φ_x als Funktion der Zeit und damit nach (51) auch vollends ω_x zu finden, führen wir die Integrale (52) in die Gleichung (5) ein und erhalten

$$\dot{\omega}_x = m_x + \tfrac{1}{2}\,\omega_1^2\,\alpha\,\sqrt{\beta\,\gamma}\,\sin 2\left(\sqrt{\beta\,\gamma}\,\varphi_x + \sigma\right) \tag{53}$$

und hieraus durch Multiplikation mit $\omega_x = d\varphi_x/dt$ und Integration

$$\omega_x = \sqrt{U(\varphi_x)} \tag{54}$$

mit der Funktion

$$U(\varphi_x) \equiv \omega_{x0}^2 + 2\,m_x\,\varphi_x - \tfrac{1}{2}\,\omega_1^2\,\alpha\left[\cos 2\left(\sqrt{\beta\,\gamma}\,\varphi_x + \sigma\right) - \cos 2\,\sigma\right]. \tag{55}$$

Weiter folgt aus (54) mit (51) durch Integration

$$t = \int_0^{\varphi_x} \frac{d\varphi_x}{\sqrt{U(\varphi_x)}}. \tag{56}$$

Die Umkehrfunktion sei

$$\varphi_x = \varphi_x(t), \tag{57}$$

und hiermit ist die Lösung (52) und (54) als Funktion der Zeit gefunden. Über das Vorzeichen von $\sqrt{U}$ in (54) und (56) wird nachher noch eine Festsetzung zu treffen sein.

Das Integral (56) ist offensichtlich die Erweiterung des elliptischen Integrales erster Gattung, auf welches man bei der Behandlung des kräftefreien unsymmetrischen Kreisels stößt, und in das es mit $m_x = 0$ übergeht; die Umkehrung (57) entspricht der elliptischen Amplitudenfunktion, und die Lösungen (52) und (54) entsprechen den *Jacobi*schen Funktionen cn, sn und dn. Weil im Gegensatz zu diesen Funktionen die Funktion $\varphi_x(t)$ bisher nicht tabuliert ist, so wird die zahlenmäßige Auswertung unserer jetzigen exakten Lösung vielleicht mühsamer sein als die frühere iterative Lösung von Ziff. 2, wenigstens soweit jene gut konvergiert (also für kleine Werte von ω_1). Dafür wird uns aber die exakte Lösung weitere Bewegungstypen aufzeigen, die in dem beschränkten Geltungsbereich (Konvergenzbereich) der iterativen Lösung noch nicht enthalten waren.

Man muß im wesentlichen zwei Bewegungstypen sowie einen Grenzfall unterscheiden und erhält diese, wenn man die beiden Bestandteile der Funktion U (55) über einer Abszisse φ_x als Kurven aufzeichnet, nämlich die Gerade $\omega_{x_0}^2 + 2\,m_x\,\varphi_x$ und die Cosinuslinie $c(\varphi_x) \equiv \tfrac{1}{2}\,\omega_1^2\,\alpha\left[\cos 2\left(\sqrt{\beta\,\gamma}\,\varphi_x + \sigma\right) - \cos 2\,\sigma\right]$. Hierbei können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit ω_{x0} als positiv voraussetzen, müssen dann aber für m_x positive und negative Werte zulassen (diese Vorzeichenfestsetzung im Gegensatz zu Ziff. 2 hat hier gewisse Vorteile für die Darstellung). Je nachdem, zunächst für $m_x > 0$, die Gerade die Cosinuslinie bei positiven Abszissen φ_x nicht schneidet oder doch schneidet, erhält man die beiden Typen von Abb. 1 oder von Abb. 2. Dort ist jeweils der Bereich der positiven U-Werte schraffiert, welche wegen (54) und (56) für die Bewegung allein in Betracht kommen, und die Schraffurstriche stellen die Werte ω_x^2 dar.

Im ersten Fall (Abb. 1) nimmt die Drehkomponente ω_x im ganzen, wenn auch von mehr oder weniger starken Schwankungen überlagert, mit der Zeit über alle Grenzen zu, wie es im

unteren Teile von Abb. 1 skizziert ist, und dies ist offenbar der schon durch die iterative Lösung gefundene Typ der asymptotischen Bewegungen erster Art (Ziff. 2). Die Quadratwurzel $\sqrt{U}$ ist dabei in (54) und (56) positiv zu nehmen, da ω_{x0} voraussetzungsgemäß positiv ist und dann φ_x in der Tat mit t wächst. Aber man kann natürlich $\sqrt{U}$ und also ω_x und damit nach (56) auch $d\varphi_x$ negativ wählen, und dies bedeutet, daß nun die Gerade $\omega_{x0}^2 + 2\, m_x \varphi_x$ von beliebig großen Werten φ_x aus nach links hin durchlaufen wird: die positive Selbsterregung m_x zieht einen Drehvektor, der anfänglich in der Nähe der negativen x-Achse lag und einen beliebig großen Betrag hatte, in die Lage ω_{x0}, ω_{y0}, ω_{z0} zurück.

Als Beispiel für den zweiten Fall nehmen wir an (Abb. 2), daß ω_{x0}^2 kleiner als der Höchstwert von $c(\varphi_x)$, und daß m_x schwach positiv sei. Dann nimmt ω_x, mit ω_{x0} beginnend, nach Überschreitung eines Höchstwertes bis zu Null ab (für $\varphi_x = \varphi_{x1}$ und $t = t_1$), und bis dahin war $\sqrt{U}$ positiv zu nehmen. Da beim Weiterschreiten auf der Geraden U negativ, also $\sqrt{U}$ und damit auch ω_x imaginär würden, so ist jetzt das Vorzeichen von $\sqrt{U}$ umzudrehen: φ_x nimmt nach (56) ab, ω_x wird negativ, geht über einen negativen Höchstwert zu Null (bei $\varphi_x = \varphi_{x2}$ und $t = t_2$), kehrt dann nach abermaligem Vorzeichenwechsel von $\sqrt{U}$ zum Anfangswert ω_{x0} (für $t = T$) zurück, und nun beginnt das Spiel von neuem. Da nach (52) auch die Drehkomponenten ω_y und ω_z entsprechend hin und her schwanken (allerdings nur mit $\varphi_{x2} \leq \varphi_x \leq \varphi_{x1}$, also nicht unbedingt zwischen positiven und negativen Werten), so ist die Bewegung jetzt hinsichtlich der Wanderung des Drehvektors $\mathfrak{o}$ im Körper periodisch, und zwar mit

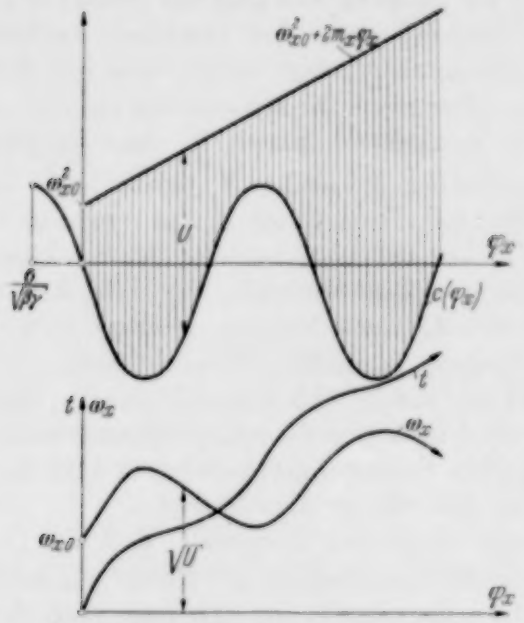


Abb. 1. Asymptotischer Bewegungstyp für $x \neq 0$, $m_y = m_z = 0$.

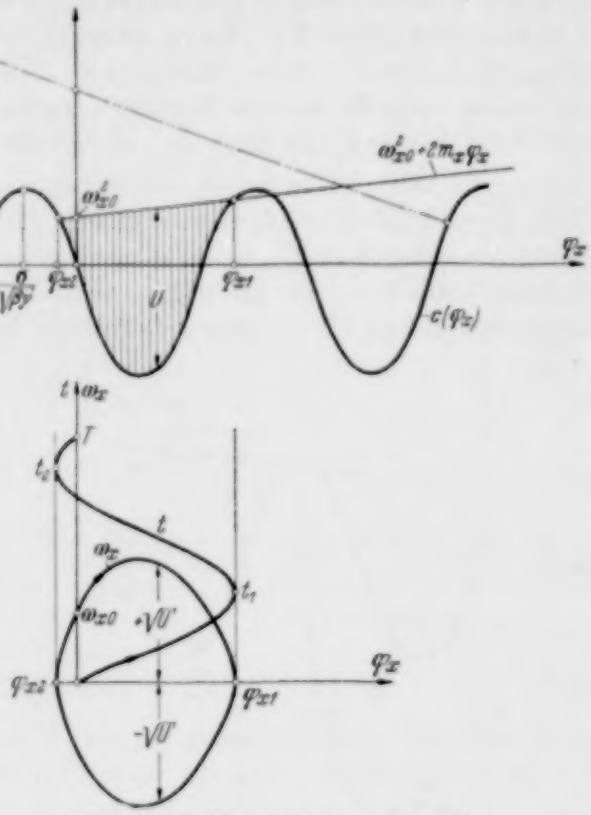


Abb. 2. Periodischer Bewegungstyp für $m_x \neq 0$, $m_y = m_z = 0$.

einer Periode T, die durch das über die geschlossene ω_x-Kurve von Abb. 2 unten erstreckte Integral

$$T = \oint \frac{d\varphi_x}{\sqrt{U(\varphi_x)}} \tag{58}$$

dargestellt ist. Diese Periodizität des Drehvektors $\mathfrak{o}$ im Körper bedeutet aber keineswegs auch eine völlige Periodizität der Bewegung des Kreisels im Raume (wie man ja schon von der *Poinsot*bewegung des kräftefreien Kreisels weiß). Trotzdem wollen wir diesen Bewegungstyp periodisch nennen.

Die Quadratwurzel $\sqrt{U}$ ist in (58) positiv oder negativ zu wählen, je nachdem jeweils $d\varphi_x$ positiv oder negativ ist.

Man erkennt, daß Abb. 1 u. 2 und mit ihnen der Bewegungsverlauf mannigfacher Abwandlung fähig ist. Wenn etwa in Abb. 2 die Momentgröße m_x stark negativ gewählt wird, so bleibt zwar φ_{x1} reell, wogegen die Gerade $\omega_{x0}^2 + 2\, m_x \varphi_x$ für negative φ_x keinen reellen Schnittpunkt φ_{x2} mit der Kurve $c(\varphi_x)$ besitzt. Demgemäß nimmt in diesem Fall die ursprünglich positive Drehkomponente ω_x nach ihrem Durchgang durch Null negative Werte an, deren Betrag dann für fortschreitende negative Werte von φ_x) wie im Falle von Abb. 1 mit mehr oder weniger

starken Schwankungen über alle Grenzen wächst. Ist ω_{x0}^2 größer als der Höchstwert von $c(\varphi_x)$, so kann es für nicht allzu stark negative m_x vorkommen, daß die Gerade $\omega_{x0}^2 + 2\, m_x \varphi_x$ die Kurve $c(\varphi_x)$ erst rechts von ihrem ersten Höchstwert schneidet (in Abb. 2 strichpunktiert). Man wird sich leicht klarmachen, wie alsdann der Wert von ω_x über eine (oder auch mehrere) Schwankungen zu Null abnimmt und darnach schwankend zu immer stärker negativen Werten aufsteigt.

Offenbar sind insbesondere die Bewegungstypen von Abb. 1 und 2 die Verallgemeinerungen der *Poinsot*bewegung des kräftefreien unsymmetrischen Kreisels. Wenn ω_{x0} groß genug ist — dies entspricht den Polbahnen erster Art der *Poinsot*bewegung —, so hebt jede von Null verschiedene (positive oder negative) Momentgröße m_x die Periodizität der Bewegung auf und verwandelt diese in eine asymptotische mit $|\omega_x| \to \infty$. Wenn dagegen der (positive) Wert ω_{x0} hinreichend klein ist — dies entspricht den Polbahnen zweiter Art —, so wird durch eine Momentgröße m_x von hinreichend kleinem Betrag die Periodizität der Bewegung nicht aufgehoben. Man kann mit (52) und (53) beweisen, daß der erste oder zweite Fall vorliegt, je nachdem

$$\frac{\omega_{x0}^2}{\omega_{z0}^2} \gtrless \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{C(B-C)}{A(A-B)} \tag{59}$$

ist, je nachdem also der anfängliche Drehvektor $\mathfrak{o}_0$ in demjenigen Keil zwischen den beiden Ebenen der sogenannten trennenden Polbahn[1] (des kräftefreien Kreisels) liegt, welchem die x- oder die z-Achse angehört. In den Darstellungen gemäß Abb. 1 und 2 unterscheiden sich die beiden Fälle in der Form $\omega_{x0}^2 \gtrless c(\varphi_x)_{max}$; vgl. die ausgezogene und die strichpunktierte Gerade von Abb. 2.) Kurz gesagt: umtanzt der Drehvektor $\mathfrak{o}$ des zunächst kräftefreien Kreisels die x-Achse, so läßt jedes Selbsterregungsmoment M_x den Drehvektor mit der Zeit zu unbeschränkt hohen Beträgen anwachsen, wobei aber seine Komponenten ω_y und ω_z beschränkt bleiben, so daß der Drehvektor nach (52) wenigstens innerhalb eines elliptischen Zylinders mit der x-Achse als Achse und den Halbachsen $\omega_1\sqrt{\beta}$ und $\omega_1\sqrt{\gamma}$ bleibt, wie dies in Ziff. 2 geschildert war; umtanzt der Drehvektor dagegen ursprünglich die z-Achse, so bleibt bei hinreichend schwacher Selbsterregung M_x die Periodizität des Drehvektors im Kreisel erhalten. Es ist daher verständlich, daß die iterative Methode von Ziff. 2 nur den asymptotischen Bewegungstyp liefern konnte: nach den dortigen Voraussetzungen (10) durfte die Selbsterregung m_x nicht „schwach" sein.

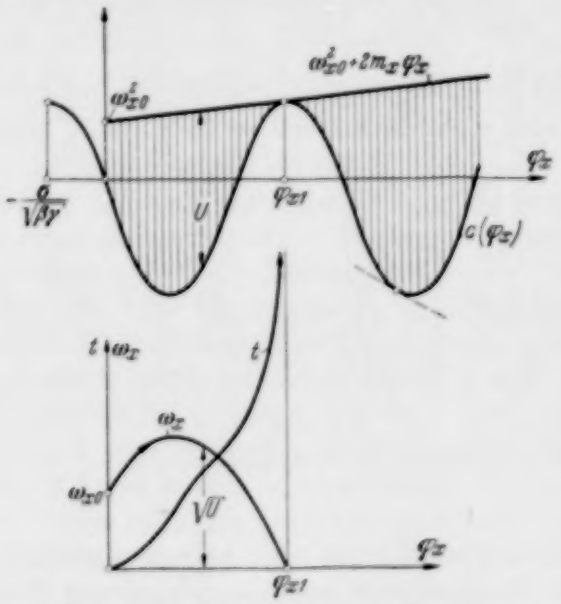


Abb. 3. Grenzfall der stationären Bewegung.

Falls σ nicht, wie in Abb. 1 und 2, positiv, sondern negativ ist, wird man sich die entsprechenden Figuren mit ihren beiden Bewegungstypen leicht klar machen können, ohne daß wir sie anzeichnen.

Nun bleibt noch der Grenzfall, daß die Gerade $\omega_x^{20} + 2\, m_x \varphi_x$ die Cosinuslinie im Punkt φ_{x1} berührt; er ist in Abb. 3 dargestellt für den Fall, daß die Berührung „von oben" erfolgt. Die Zeit t wird jetzt für $\varphi_x = \varphi_{x1}$ logarithmisch unendlich, und die Bewegung nähert sich nun asymptotisch dem Drehvektor $\mathfrak{o}_1$ mit der Komponente $\omega_{x1} = 0$, also einer Drehung um eine feste Achse in der (y, z)-Ebene, und dies ist der Typ der schon in Ziff. 4 erwähnten asymptotischen Bewegungen zweiter Art. Weil dort $d\varphi_x/dt = 0$, also

$$\dot{\omega}_x = \frac{d\omega_x}{d\varphi_x}\frac{d\varphi_x}{dt} = 0$$

wird, so ist diese Drehung dort permanent geworden, und somit ist nach (5)

$$m_x = -\alpha\, \omega_y\, \omega_z$$

oder wegen (3) und (4)

$$M_x = -(B-C)\, \omega_y\, \omega_z\,, \tag{60}$$

und dies bedeutet, daß M_x gerade das Moment ist, welches diese permanente Drehung aufrechterhalten kann[2]. Weil die Drehung (60) aber nicht nur durch das Moment M_x asymptotisch er-

[1] *R. Grammel*, Der Kreisel, Bd. 1, S. 131, Formel (16).
[2] *R. Grammel*, Ing.-Arch. 21 (1953), S. 150.

reichbar ist, sondern auch (vgl. die weitere Schraffur in Abb. 3) bei der geringsten Störung wieder verlassen werden kann, so ist diese stationäre Bewegung als i n s t a b i l zu bezeichnen, und da der Drehvektor dann (schwankend) über alle Grenzen wächst, so kann also eine asymptotische Bewegung zweiter Art in eine solche erster Art übergehen, und umgekehrt.

Wenn hingegen die Berührung der Geraden $\omega_{x_0}^2 + 2\, m_x\, \varphi_x$ an der Cosinuslinie „von unten" erfolgt, wie dies in Abb. 3 durch die gestrichelte Linie angedeutet ist, so hat man es offenbar dort mit einer s t a b i l e n permanenten Drehung zu tun.

Man kann zeigen, daß dies die gleichen Bereiche der Instabilität und Stabilität sind, die von den permanenten Drehungen um Achsen in der (y, z)-Ebene bekannt sind[1]. Sie werden getrennt durch die Wendepunkte der Cosinuslinie; und von denjenigen permanenten Drehungen, die durch diese Wendepunkte dargestellt werden, geht nur eine asymptotische Bewegung erster Art aus, aber keine solche zweiter Art.

Es versteht sich von selbst, daß man in der gleichen Weise die exakte Lösung für den Fall $m_x = m_y = 0$, $m_z \neq 0$ eines Momentvektors $\mathfrak{M}$ in der z-Achse findet; man braucht nur wieder die maßgebenden Größen entsprechend zu vertauschen. Auch hier gibt es die soeben diskutierten drei Bewegungstypen samt ihrem stationären Grenzfall.

Aber auch die exakte Lösung für den Fall eines Momentes $\mathfrak{M}$ in der m i t t l e r e n Hauptachse (y-Achse) kann man auf diesem Wege finden. Mit $m_x = m_z = 0$, $m_y \neq 0$ folgt aus (5) und (7) entweder

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= \omega_2 \sqrt{\alpha}\, \mathfrak{Cof}\left(\sqrt{\alpha\,\gamma}\,\varphi_y + \sigma\right), \\ \omega_z &= \omega_2 \sqrt{\gamma}\, \mathfrak{Sin}\left(\sqrt{\alpha\,\gamma}\,\varphi_y + \sigma\right) \end{aligned}\right\} \tag{61a}$$

mit

$$\omega_2^2 = \frac{\omega_{x_0}^2}{\alpha} - \frac{\omega_{z_0}^2}{\gamma}, \qquad \mathfrak{Tg}\,\sigma = \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}\,\frac{\omega_{z_0}}{\omega_{x_0}} \tag{62a}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= \omega_2 \sqrt{\alpha}\, \mathfrak{Sin}\left(\sqrt{\alpha\,\gamma}\,\varphi_y + \sigma\right), \\ \omega_z &= \omega_2 \sqrt{\gamma}\, \mathfrak{Cof}\left(\sqrt{\alpha\,\gamma}\,\varphi_y + \sigma\right) \end{aligned}\right\} \tag{61b}$$

mit

$$\omega_2^2 = \frac{\omega_{z_0}^2}{\gamma} - \frac{\omega_{x_0}^2}{\alpha}, \qquad \mathfrak{Tg}\,\sigma = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\,\frac{\omega_{z_0}}{\omega_{x_0}} \tag{62b}$$

und dann aus (6)

$$\omega_y = \sqrt{V(\varphi_y)} \tag{63}$$

mit

$$\varphi_y = \int_0^t \omega_y\, dt \tag{64}$$

und der Funktion

$$V(\varphi_y) \equiv \omega_{y0}^2 + 2\, m_y\, \varphi_y - \tfrac{1}{2}\, \omega_2^2\, \beta \left[\mathfrak{Cof}\, 2\left(\sqrt{\alpha\,\gamma}\,\varphi_y + \sigma\right) - \mathfrak{Cof}\, 2\,\sigma\right]. \tag{65}$$

Von den beiden Lösungen (61a) und (61b) hat man jeweils diejenige zu nehmen, für welche ω_2 und σ nach (62a) und (62b) reell werden, und das heißt: die erste oder die zweite, je nachdem

$$\frac{\omega_{x_0}^2}{\omega_{z_0}^2} \gtrless \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{C\,(B-C)}{A\,(A-B)} \tag{66}$$

ist, je nachdem also der anfängliche Drehvektor $\mathfrak{v}_0$ in demjenigen Keil zwischen den beiden Ebenen der sogenannten trennenden Polbahn liegt, welchem die x- oder die z-Achse angehört. Der Fall $\omega_{x0}^2/\omega_{z0}^2 = \alpha/\gamma$, daß der anfängliche Drehvektor $\mathfrak{v}_0$ in einer der beiden Ebenen der trennenden Polbahn liegt, ist hier auszuschließen, da für ihn mit $\omega_2 = 0$ und $\sigma = \pm\infty$ die Lösungen (61a) und (61b) unbrauchbar werden; wir werden ihn in Ziff. 6 behandeln.

Weiter ist

$$t = \int_0^{\varphi_y} \frac{d\varphi_y}{\sqrt{V(\varphi_y)}} \tag{67}$$

und umgekehrt

$$\varphi_y = \varphi_y(t)\,. \tag{68}$$

[1] *R. Grammel*, Ing.-Arch. 21 (1953), S. 152.

Die Quadratwurzeln in (61) und (62) darf man wieder positiv festsetzen, diejenigen in (63) und (67) richten sich nach dem Vorzeichen von $d\varphi_y$.

Um den Bewegungstyp zu erkennen, trägt man die beiden Bestandteile der Funktion V (65), von denen wir den zweiten kurz mit $\mathfrak{C}(\varphi_y)$ bezeichnen wollen, über der Abszisse φ_y auf und erhält so Abb. 4. Man erkennt, daß jetzt die Bewegung durchweg dem Typ von Abb. 2 angehört und p e r i o d i s c h ist, und zwar mit der Periodendauer

$$T = \oint \frac{d\varphi_y}{\sqrt{V(\varphi_y)}} . \tag{69}$$

Die Pfeilspitze des Drehvektors $\mathfrak{d}$ läuft, wie aus (61a) oder (61b) folgt, auf einem hyperbolischen Zylinder, der die y-Achse zur Achse hat und entweder der Gleichung

$$\frac{\omega_x^2}{\omega_2^2 \alpha} - \frac{\omega_z^2}{\omega_2^2 \gamma} = 1 \tag{70a}$$

oder der Gleichung

$$\frac{\omega_z^2}{\omega_2^2 \gamma} - \frac{\omega_x^2}{\omega_2^2 \alpha} = 1 \tag{70b}$$

gehorcht und also das gleiche Achsenverhältnis hat wie die hyperbolischen Zylinder gleicher Achse, welche beim kräftefreien Kreisel die Polbahnen erster oder zweiter Art aus dem *Poinsot*ellipsoid ausschneiden. Im Gegensatz zu jenen Polbahnen haben aber die jetzigen Polbahnen infolge des Momentes $\mathfrak{M}$ ihre Symmetrie bezüglich der (x, y)- und (y, z)-Ebene verloren.

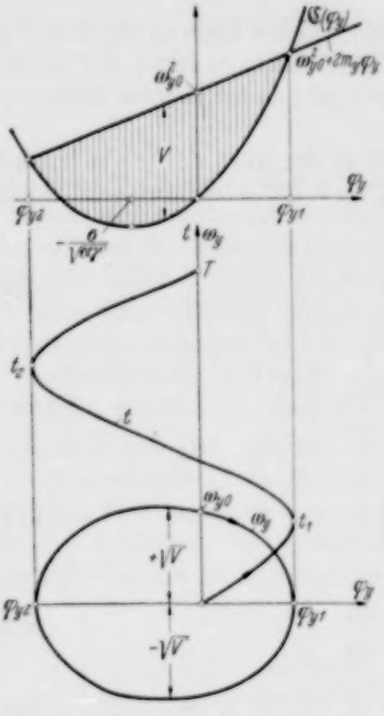


Abb. 4. periodischer Bewegungstyp für $m_y \neq 0$, $m_x = m_z = 0$.

Während ein Momentvektor $\mathfrak{M}$ in der x-Achse oder in der z-Achse, wenn er nur groß genug war, die vom kräftefreien unsymmetrischen Kreisel her bekannte Periodizität des Drehvektors überwinden und den Drehvektor $\mathfrak{d}$ über alle Grenzen anwachsen lassen konnte, so ist dies bei einem Momentvektor in der y-Achse, auch wenn er noch so groß wird, nicht mehr der Fall (mit einer singulären, in Ziff. 6 festzustellenden Ausnahme), — ein unerwartetes und sehr paradox erscheinendes Ergebnis. Allerdings erkennt man aus Abb. 4, daß ein Momentvektor $\mathfrak{M}$ von ungemein hohem Betrag (also sehr steilem Anstieg der dortigen Geraden) den Schnittpunkt φ_{y1} oder φ_{y2} beliebig weit vom Nullpunkt wegrücken kann, so daß auch hier beliebig hohe Beträge von ω_y erreichbar sind; aber schließlich muß, wenn auch nach langer Zeit, ω_y doch wieder abnehmen. [Wir werden in Ziff. 6 sehen, daß erst, wenn die Zylinder (70) in die beiden Ebenen der trennenden Polbahn ausarten, die Periode T (69) unendlich groß werden kann.]

Es sei der Vollständigkeit halber noch erwähnt, daß auch hier der Grenzfall einer p e r m a n e n t e n Drehung vorkommt: wenn mit $\omega_{y0} = 0$ die Gerade $\omega_{y_0}^2 + 2\, m_y\, \varphi_y$ in Abb. 4 die $\mathfrak{C}o\mathfrak{f}$-Kurve im Nullpunkt berührt, so schrumpft nämlich das schraffierte Gebiet in diesen Punkt zusammen. Diese stationäre Drehung mit $\omega_y = 0$ um eine Achse in der (x, z)-Ebene ist s t a b i l [1], da kein schraffierbarer Nachbarbereich existiert, und allgemein stellt nicht nur der Nullpunkt, sondern jeder Punkt der $\mathfrak{C}o\mathfrak{f}$-Kurve eine der bekannten stabilen permanenten Drehungen um alle Nullpunktsachsen der (x, z)-Ebene dar.

Wie schon festgestellt, kann unsere Lösung nicht bis zur trennenden Polbahn des kräftefreien unsymmetrischen Kreisels vordringen. Auch der Konvergenzbereich der Lösungen von Ziff. 2 bis 4 kann dies nicht. Es ist deshalb erwünscht, jetzt auch noch diejenigen Bewegungen des achsenfest selbsterregten unsymmetrischen Kreisels zu finden, bei denen der Drehvektor $\mathfrak{d}$ in einer der beiden körperfesten Ebenen läuft, welche aus dem *Poinsot*ellipsoid die trennende Polbahn ausschneiden. Da dieser Fall beim kräftefreien Kreisel mit elementaren Funktionen gelöst werden kann[2], so ist zu vermuten, daß er auch beim selbsterregten Kreisel, wenigstens bei zeitunabhängig achsenfester Selbsterregung, eine verhältnismäßig einfache Lösung zuläßt.

[1] Genauer gesagt: parastabil, vgl. *R. Grammel*, Ing.-Arch. 21 (1953), S. 152.
[2] Siehe *R. Grammel*, Der Kreisel Bd. 1, S. 147.

6. Der Fall der trennenden Polbahn. Man erhält die Lösung für diesen Fall, wenn man sich die Frage vorlegt, ob ein körperfester zeitunabhängiger Momentvektor $\mathfrak{M}$ in der mittleren Hauptachse den Drehvektor $\mathfrak{v}$ in einer körperfesten Ebene bewegen kann, welche durch die mittlere Hauptachse hindurchgeht, das heißt: ob die Gleichungen (5) bis (7) mit

$$m_x = 0, \quad m_y = \text{konst.} \neq 0, \quad m_z = 0 \tag{71}$$

durch einen Ansatz von der Form

$$\omega_x = \omega_0 f(\tau), \quad \omega_y = \omega_0 g(\tau), \quad \omega_z = \lambda \omega_0 f(\tau) \tag{72}$$

befriedigt werden können, wo ω_0 ein noch offener positiver Faktor von der Dimension einer Drehgeschwindigkeit ist und $f(\tau)$ und $g(\tau)$ noch zu bestimmende Funktionen der dimensionslosen Zeitvariabeln

$$\tau = \omega_0 t \tag{73}$$

sind und λ ein ebenfalls noch unbekannter Festwert sein soll, der offenbar den Tangens des Keilwinkels ψ zwischen jener körperfesten Ebene und der (x, y)-Ebene angibt.

Die Gleichungen (5) bis (7) gehen mit (71) bis (73) über in

$$f' - \alpha \lambda f g = 0, \tag{74}$$

$$g' + \beta \lambda f^2 = \frac{m_y}{\omega_0^2}, \tag{75}$$

$$\lambda f' - \gamma f g = 0, \tag{76}$$

wobei Striche fortan Ableitungen nach τ bedeuten sollen. Damit (74) und (76) miteinander verträglich sind, muß $\alpha \lambda = \gamma/\lambda$, also

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}} = \pm \sqrt{\frac{A(A-B)}{C(B-C)}} \tag{77}$$

sein, und das besagt, daß in jedem unsymmetrischen Kreisel nur zwei solche Ebenen existieren, symmetrisch zur (x, y)-Ebene, und in der Tat gerade die beiden Ebenen der sogenannten trennenden Polbahn des kräftefreien Kreisels sind.

Dann folgt aus (76), unter Ausschaltung des trivialen Falles $f \equiv 0$,

$$g(\tau) = \frac{\lambda}{\gamma} \frac{f'}{f}, \tag{78}$$

und mit diesem Wert von g geht (75) über in

$$f f'' - f'^2 + q f^4 - r f^2 = 0, \tag{79}$$

wobei zur Abkürzung die dimensionslosen Größen

$$q = \beta \gamma > 0, \qquad r = \alpha \lambda \frac{m_y}{\omega_0^2} \tag{80}$$

eingeführt sind und auf (77) geachtet ist.

Weil die nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung (79) die Zeitvariable τ nicht explizit enthält, kann man sie in eine Differentialgleichung erster Ordnung verwandeln, und zwar durch die Substitution

$$f'^2(\tau) = f^2(\tau)\, u(f) \tag{81}$$

in eine solche mit separablen Veränderlichen, nämlich

$$f \frac{du}{df} + 2 q f^2 - 2 r = 0, \tag{82}$$

und diese hat das allgemeine Integral

$$u = D - q f^2 + 2 r \ln f. \tag{83}$$

Die Integrationskonstante D bestimmen wir, indem wir, offenbar ohne wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit, verabreden, daß die Bewegung für $t = \tau = 0$ mit einem Drehvektor beginnen soll, der in der (x, z)-Ebene liegt, also senkrecht zum Momentvektor $\mathfrak{M}$ steht, und dessen Komponente ω_x die Größe ω_0 haben soll. Wir setzen also

$$f = 1, \qquad g = 0, \qquad f' = 0 \qquad \text{für} \quad \tau = 0, \tag{84}$$

wobei die letzte dieser drei Bedingungen wegen der vorletzten aus (74) oder (76) folgt. Dies gibt dann zufolge (81) auch $u = 0$ für $\tau = 0$ und daher nach (83) $D = q$. Mit diesem Wert folgt aus (81) und (83) durch eine weitere Integration

$$\tau = \int_1^f \frac{df}{f\sqrt{q\,(1-f^2) + 2\,r \ln f}}\,, \tag{85}$$

wobei über das Vorzeichen der Quadratwurzel nachher noch eine Vorschrift folgen wird. Wir denken uns diese Funktion umgekehrt; dann ist mit

$$f = f(\tau) \tag{86}$$

die Zeitfunktion f gefunden. Aus (78) folgt mit (81) und (83) sofort vollends

$$g(\tau) = \frac{\lambda}{\gamma}\sqrt{q\,(1-f^2) + 2\,r \ln f}\,, \tag{87}$$

wiederum vorbehältlich einer noch zu treffenden Vorschrift über das Vorzeichen der Quadratwurzel.

Schon aus der Differentialgleichung (79) ist, wegen der verschiedenen Vorzeichen von r (80) in den beiden Ebenen (77), ersichtlich, daß man auch bei gleichem Wert m_y und bei gleichen Werten α, β, γ, ω_0, also gleichen Werten q und $|r|$ verschiedene Verläufe des Drehvektors $\mathfrak{d}$ in jenen beiden Ebenen zu erwarten hat. Dies sieht zunächst paradox aus, da doch die beiden Ebenen völlig gleichwertig zu sein scheinen, wird aber verständlich, wenn man beachtet, daß im einen Falle ($\lambda > 0$) die positive x-Achse, der (für $m_y > 0$) in die positive y-Achse fallende Momentvektor $\mathfrak{M}$ und der anfängliche Drehvektor (in der (x, z)-Ebene) für $\omega_0 > 0$ ein rechtshändiges (teilweise schiefwinkliges) Achsenkreuz bilden, im anderen Falle ($\lambda < 0$) dagegen ein linkshändiges. Wir werden jetzt durch eine genauere Untersuchung der Lösung bestätigen, daß in der Tat die Bewegung in beiden Fällen (nicht nur quantitativ, sondern auch qualitativ) vollständig verschieden verläuft, und wir werden sehen, daß man im Falle $r > 0$ auch noch die drei Unterfälle $r \lessgtr q$ mit verschiedenem Gepräge der Bewegung unterscheiden muß.

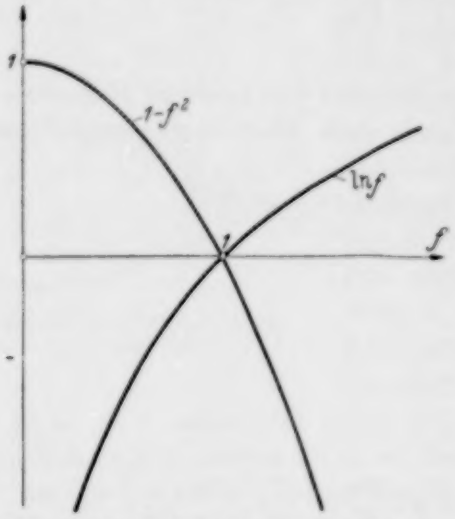


Abb. 5. Die Funktionen $1 - f^2$ und $\ln f$.

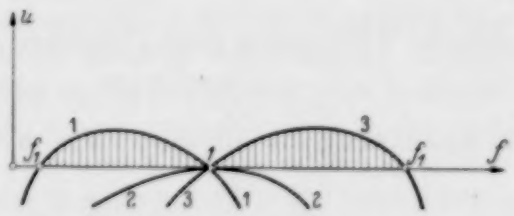


Abb. 6. Überlagerung der Funktionen $1 - f^2$ und $\ln f$.

Wir gehen aus von der Funktion $u(f)$ (83) mit $D = q$:

$$u = q\,(1-f^2) + 2\,r \ln f \tag{88}$$

und betrachten zunächst den Fall $r > 0$, also auch $\lambda > 0$, da man ohne Einschränkung der Allgemeinheit weiterhin m_y als positiv voraussetzen darf. Trägt man die beiden Funktionen $1 - f^2$ und $\ln f$ über der Abszisse f als Kurven auf (Abb. 5), so erkennt man, daß ihre Überlagerung mittels der positiven Faktoren q und r je nach der Größe von q und r drei verschiedene Kurventypen für $u(f)$ ergeben kann, nämlich für $r < q$ die Type 1 von Abb. 6, für $r = q$ die Type 2 und für $r > q$ die Type 3. Man erhält nämlich aus (88)

$$\left(\frac{du}{df}\right)_{f=1} = 2\,(r-q) \lessgtr 0 \qquad \text{für} \quad r \lessgtr q$$

und

$$\left(\frac{d^2u}{df^2}\right)_{f=1} = -\,2\,(q+r) < 0\,.$$

Die Kurventype 1 schneidet die f-Achse außer in $f = 1$ noch in einem zweiten Punkt mit der Abszisse f_1, wobei $0 < f_1 < 1$ ist. Ebenso hat die Kurventype 3 außer $f = 1$ noch einen Ab-

szissenschnittpunkt $f_1 > 1$. Beide Typen besitzen positive u-Werte in dem Bereich zwischen 1 und f_1, und nur in diesem Bereich. Weil nun nach (85) und (87)

$$\tau = \int_1^f \frac{df}{f\sqrt{u(f)}}, \qquad g(\tau) = \frac{\lambda}{\gamma}\sqrt{u(f)} \tag{89}$$

ist, so kommen für eine reelle Bewegung nur diese (in Abb. 6 wieder schraffierten) Bereiche in Frage.

Beginnt die Bewegung, wie wir es verabredet hatten, mit $f = 1$ zur Zeit $\tau = 0$, so wandert u auf den Kurven 1 (für $r < q$) bzw. 3 (für $r > q$) vom Punkt $f = 1$ gegen den Punkt f_1 hin und, sobald dieser erreicht ist, wieder zu $f = 1$ zurück, und dann beginnt das Spiel von neuem. Demgemäß hat man für τ (89) und die erste Halbperiode der Bewegung folgende Vorschrift über das Vorzeichen von $\sqrt{u}$ zu treffen:

$$\sqrt{u}\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}\right\} \quad \text{für} \quad r \lessgtr q \quad \text{und} \quad f \to f_1 .$$

Die gleiche Vorzeichenregel gilt natürlich auch für $f' = f\sqrt{u}$ und also wegen (78) auch für $g(\tau)$(89). Gerade die umgekehrte Vorzeichenvorschrift gilt in der zweiten Halbperiode:

$$\sqrt{u}\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\} \quad \text{für} \quad r \lessgtr q \quad \text{und} \quad f \to 1 .$$

Die Periodendauer ist im ganzen

$$T = 2\int_1^{f_1} \frac{df}{f\sqrt{u(f)}} . \tag{90}$$

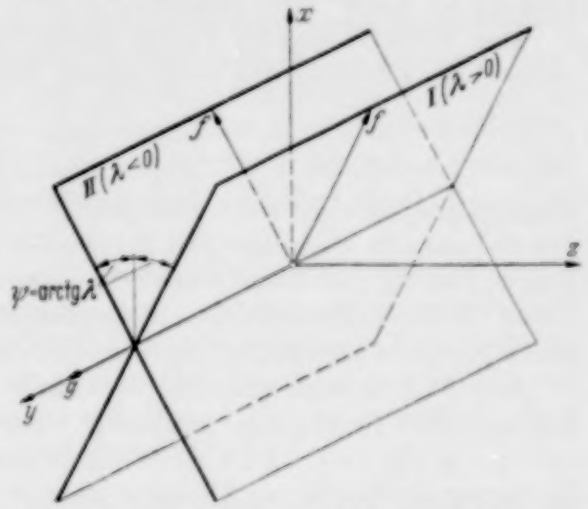


Abb. 7. Die beiden Polebenen I ($\lambda > 0$) und II ($\lambda < 0$).

Wir wollen nun den Verlauf des Drehvektors $\mathfrak{v}$ für $\lambda > 0$, also $r > 0$ in den beiden Fällen $r \lessgtr q$, also die zugehörige Polbahn figürlich darstellen. Abb. 7 zeigt zunächst schematisch das Hauptachsenkreuz samt den beiden Ebenen (77) und je einer f-Achse in diesen Ebenen: I für $\lambda > 0$ und II für $\lambda < 0$. In Abb. 8 sind diese Ebenen, genauer gesagt, die „oberen" Halbebenen

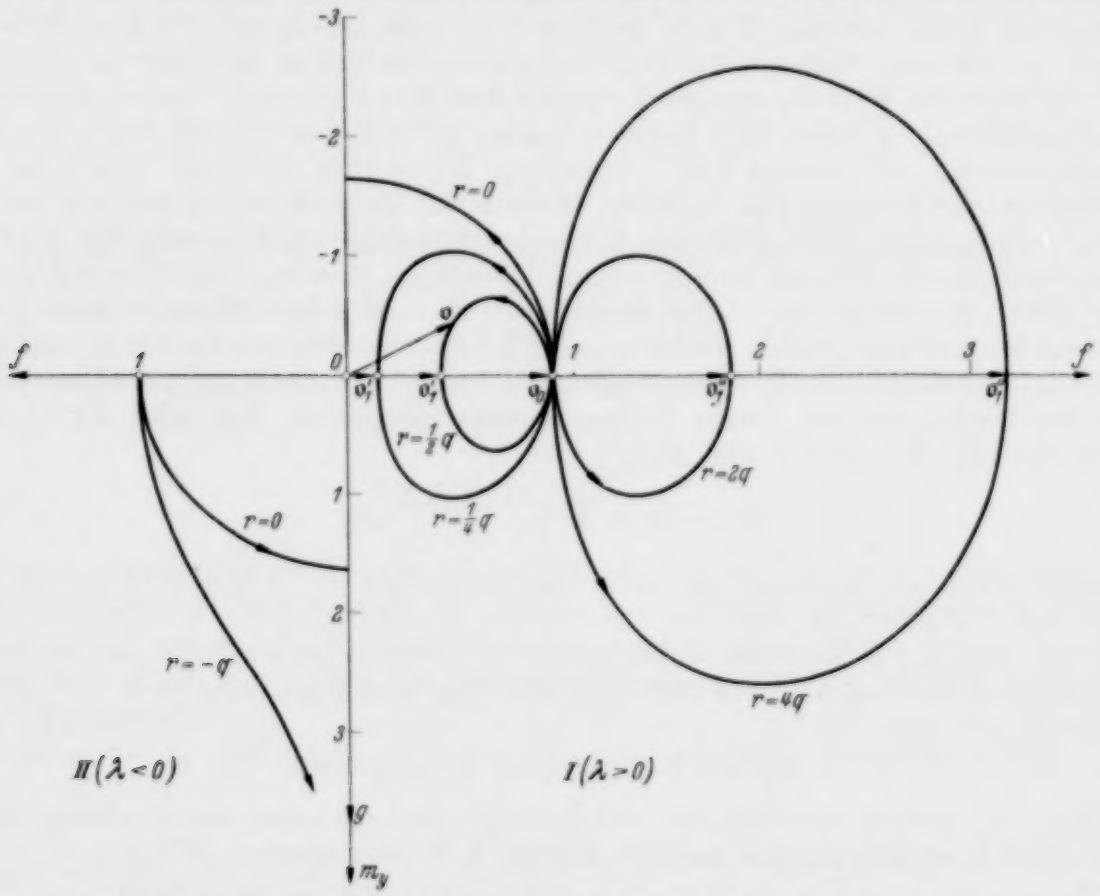


Abb. 8. Die Polbahnen in den beiden Polebenen I und II, für $m_y \gtrless 0$, $m_x = m_z = 0$.

in die (y, z)-Ebene hineingeklappt und dann zunächst in der rechten Halbebene I die (f, g)-Kurven aufgezeichnet, und zwar durch Auswertung der Gleichung (87) je für die Parameterwerte $r = \frac{1}{4}\,q,\ \frac{1}{2}\,q,\ 2\,q,\ 4\,q$, und versehen mit den Pfeilen der Richtung, in der sie durchlaufen werden, wenn $m_y > 0$ ist. Dabei sind folgende Werte zugrunde gelegt: $A : B : C = 4 : 3 : 2$, also $\lambda = \sqrt{2},\ q = \frac{1}{3},\ \lambda/\gamma = 2\sqrt{2}$. In Wirklichkeit müßte man die Abszissen f noch mit dem Faktor $\omega_0\sqrt{1+\lambda^2}$, die Ordinaten g noch mit dem Faktor ω_0 multiplizieren; da dies aber nur eine Sache des Maßstabs ist, so kann man die gezeichneten Kurven schon als die Polbahnen (Kurven der Pfeilspitze des Vektors $\mathfrak{v}$) ansehen. (In Abb. 8 ist der Maßstabsfaktor $\sqrt{1+\lambda^2}$ bei f berücksichtigt; die Kurven sind also die Polbahnen für $\omega_0 = 1$.)

Man stellt zunächst fest, daß der selbsterregte Kreisel mit einem Erregungsmoment in der y-Achse bei einem anfänglichen Drehvektor $\mathfrak{v}_0$ in der Ebene I nur Bewegungen vom p e r i o d i s c h e n Typ besitzt.

Der Vollständigkeit halber ist in Abb. 8 auch noch für $r = 0$, also $m_y = 0$ die bekannte trennende Polbahn des kräftefreien Kreisels als Viertelsellipse

$$f^2 + \frac{\alpha}{\beta}\,g^2 = 1 \tag{91}$$

eingetragen, wobei nach (85) mit $f = 0$ (und $r = 0$) $\frac{1}{2}T = \infty$ wird, und man stellt anhand des bekannten *Poinsot*schen Bildes der Bewegung leicht fest, daß der eingetragene Pfeil dieser Kurve richtig ist. [Wir wollen hier nur noch erwähnen, daß die Lösung (86), (87) von (72) für $r = 0$ in die bekannten Formeln der Bewegung im Falle der trennenden Polbahn des kräftefreien Kreisels übergehen muß, und in der Tat bestätigt man dies durch eine einfache Rechnung.]

Aus Abb. 8 liest man ab, daß für $r < q$ (schwaches Moment $\mathfrak{M}$) der Drehvektor $\mathfrak{v}$, der zu Beginn der Bewegung senkrecht zum Momentvektor (y-Achse) steht ($\mathfrak{v}_0$), sich zunächst e n t g e g e n g e s e t z t zur Richtung des Momentvektors $\mathfrak{M}$ weiterbewegt, dann in eine Richtung senkrecht zu $\mathfrak{M}$ zurückkehrt ($\mathfrak{v}_1'$) und dabei kleiner als $\mathfrak{v}_0$ geworden ist, und daß er nunmehr i m S i n n e des Moments $\mathfrak{M}$ weiterwandert und nach der Periode T (90) wieder in seine Anfangslage ($\mathfrak{v}_0$) zurückgekommen ist. Für $r > q$ (starkes Moment) bewegt er sich von Anfang an zunächst i m S i n n e des Momentvektors $\mathfrak{M}$, später im e n t g e g e n g e s e t z t e n Sinne über eine Lage ($\mathfrak{v}_1''$) senkrecht zu $\mathfrak{M}$ und dann wieder zurück zu seiner Anfangslage ($\mathfrak{v}_0$).

Man bemerkt aber, daß ein grundsätzlicher Unterschied zwischen diesen beiden Bewegungstypen eigentlich nicht besteht. Würde im Falle $r < q$ die Bewegung mit dem Anfangsvektor $\mathfrak{v}_1'$ beginnen, so wäre sie vom zweiten Typ, und das ist einfach so zu erklären, daß dieser Anfangslage ein kleinerer Wert ω_0 entspräche (wenn dort $f = 1$ sein soll), um so viel kleiner, daß dann r (80) größer als q wäre; und Entsprechendes gilt für den zweiten Typ, der mit $\mathfrak{v}_1''$ als Anfangsvektor sich in den ersten Typ verwandelt. Es ist eben nicht die Größe von m_y allein für die Fallunterscheidung $r \lessgtr q$ maßgebend, sondern der Quotient m_y/ω_0^2 und also der Quotient $|\mathfrak{M}|/\omega_0^2$, und man kann das Verhalten des Kreisels etwa dahin kennzeichnen, daß die für $\omega_0 > 0$ schon beim kräftefreien Kreisel vorherrschende Bewegungstendenz des Pols auf der Polbahn entgegengerichtet zur positiven y-Achse durch einen Momentvektor $\mathfrak{M}$ in der positiven y-Achse nur mit einem hinreichend großen Verhältnis $|\mathfrak{M}|/\omega_0^2$ überwunden werden kann, und darin liegt auch die sachliche Erklärung für dieses eigenartige und zunächst wohl paradox erscheinende Verhalten der Polbahn in der Ebene I. Das Grenzmoment M_y, das beide Fälle trennt, hat zufolge (80) mit (3), (4) und (77) den Wert

$$M_y = (A - C)\sqrt{\frac{A\,(A-B)}{C\,(B-C)}}\,\omega_0^2\,. \tag{92}$$

Ist M_y kleiner als dieser Wert, so hat man den Kurventyp $r < q$ von Abb. 8, ist es größer, so hat man den Kurventyp $r > q$.

Jetzt bleibt (für $\lambda > 0$) noch der Grenzfall $r = q$. Hier ist nach Abb. 6 nur der Wert $f \equiv 1$ möglich. Dazu gehört wegen $f' \equiv 0$ nach (74) oder (76) $g \equiv 0$ und also nach (75) $m_y = \beta\,\lambda\,\omega_0^2$ oder zufolge (4), (3) und (72)

$$M_y = (A - C)\,\omega_x\,\omega_z \qquad (\omega_y = 0)\,, \tag{93}$$

und dies ist wieder gerade das Moment, welches eine solche permanente Drehung unterhalten kann [1]. [Natürlich ist (93) nur ein anderer Ausdruck für das Moment (92).]

[1] *R. Grammel*, Ing.-Arch. 21 (1953), S. 150.

Der Fall $r < 0$, also $\lambda < 0$ der Ebene *II* erledigt sich vollends rasch. Hier ist nach (88) die Funktion $u(f)$ positiv für $0 \leq f \leq 1$ und negativ für $f > 1$; in τ (89) und $g(\tau)$ (89) ist nun der Quadratwurzel $\sqrt{u}$ das negative Vorzeichen zu geben, und man erhält eine nichtperiodische Polbahn, wie sie in Abb. 8 links in der „vorderen" Halbebene *II* für die früheren Verhältnisse $A : B : C$ und für $r = -q$ aufgezeichnet ist: Der Drehvektor $\mathfrak{o}$ wird von dem Momentvektor $\mathfrak{M}$ asymptotisch in die positive y-Achse hineingezogen. Dies rührt davon her, daß schon beim kräftefreien Kreisel ($r = 0$; vgl. die Viertelsellipse in Abb. 8 links) seine Bewegungstendenz für $\omega_0 > 0$ zur positiven y-Achse hin gerichtet ist. Somit gibt es in der Ebene *II* nur Bewegungen vom asymptotischen Typ erster Art und dies ist zugleich der in Ziff. 5 angekündigte einzige Ausnahmefall, daß ein Selbsterregungsmoment in der y-Achse den Drehvektor über alle Grenzen anwachsen lassen kann.

Wenn man auch den zeitlichen Lauf des Poles auf den Polbahnen in Abb. 8 kennen, die Polbahnen also mit Zeitmarken versehen will, so muß man natürlich auch noch das Integral (85) auswerten und umkehren, was wir aber hier nicht auszuführen beabsichtigen.

Wohl aber sei noch erwähnt, daß die Polbahnen in den „unteren" Halbebenen *I* und *II* von Abb. 7 einfach dadurch erhalten werden, daß man die Kurven in Abb. 8 samt ihren Pfeilen, je getrennt für die beiden Fälle $\lambda > 0$ und $\lambda < 0$, an der g-Achse spiegelt. Dann wenn man das Gebilde von Abb. 7 um die y-Achse so dreht, daß „unten" und „oben" vertauscht werden, so ändert sich sachlich nichts.

Da die einzigen stabilen permanenten Drehungen durch Selbsterregungsmomente unterhalten werden können, deren Vektoren $\mathfrak{M}$ in einer der drei Hauptachsen liegen[1], und da die Scharen der periodischen Bewegungen wohl stets als Nachbarbewegungen von stabilen permanenten Drehungen angesehen werden dürfen, so ist mit großer Sicherheit zu vermuten, daß die in Ziff. 5 und 6 gefundenen periodischen Bewegungen die einzigen periodischen Bewegungen sind, deren der selbsterregte unsymmetrische Kreisel fähig ist.

7. Erweiterung des Falles der trennenden Polbahn. Man kann die vorangehende Lösung noch erheblich erweitern, wenn man zuläßt, daß der Momentvektor $\mathfrak{M}$ nicht mehr in die mittlere Hauptachse fällt, so daß außer m_y auch m_x und m_z von Null verschieden sein können, jedoch immer noch verlangt, daß der Drehvektor $\mathfrak{o}$ in einer der beiden Ebenen verbleibt, die durch (77) gekennzeichnet sind. Jetzt hat man mit (72) statt (74) bis (76)

$$f' - \alpha \lambda f g = \frac{m_x}{\omega_0^2}, \tag{94}$$

$$g' + \beta \lambda f^2 = \frac{m_y}{\omega_0^2}, \tag{95}$$

$$\lambda f' - \gamma f g = \frac{m_z}{\omega_0^2}. \tag{96}$$

Damit (94) und (96) miteinander verträglich sind, muß außer (77) nun auch noch

$$\frac{m_z}{m_x} = \lambda \tag{97}$$

sein, und das heißt zufolge (4) und (77), daß die beiden Komponenten M_x und M_z des Momentes $\mathfrak{M}$ der erregenden Drehkraft in dem festen Verhältnis

$$\frac{M_z}{M_x} = \lambda \frac{C}{A} = \pm \sqrt{\frac{C(A-B)}{A(B-C)}} \tag{98}$$

stehen müssen. Zwar fallen die Projektionen des in der Ebene (77) wandernden Drehvektors $\mathfrak{o}$ und des körperfesten Momentvektors $\mathfrak{M}$ auf die (x, z)-Ebene nicht in die gleiche Gerade, aber sie liegen, wie man leicht erkennt, stets im gleichen Quadranten der (x, z)-Ebene, und zwar wegen $C < A$ die Projektion des Momentvektors stets näher bei der x-Achse als diejenige des Drehvektors.

Man führt außer den Abkürzungen (80) noch die weitere dimensionslose Größe

$$p = \frac{m_x}{\omega_0^2} \tag{99}$$

[1] *R. Grammel*, Ing.-Arch. 21 (1953) S. 152.

ein und erhält dann aus (96) mit (97) und (99) (da hier wegen $m_x \neq 0$ oder $m_z \neq 0$ sicherlich $f \not\equiv 0$ ist)

$$g(\tau) = \frac{\lambda}{\gamma}\frac{f' - p}{f} \tag{100}$$

und hiermit aus (95)

$$f f'' - f'^2 + p f' + q f^4 - r f^2 = 0 \tag{101}$$

als Erweiterungen von (78) und (79).

Wendet man auf die nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung (101) die Substitution

$$f'(\tau) = f(\tau)\, v(f) + p \tag{102}$$

an, so geht sie über in eine ebensolche erster Ordnung

$$(f v + p)\frac{dv}{df} + q f^2 - r = 0\,. \tag{103}$$

Sei $v = v(f)$ ihr Integral, etwa für die Anfangsbedingungen $f(0) = f_0$ und $g(0) = g_0$, so folgt aus (102)

$$\tau = \int_{f_0}^{f} \frac{df}{f\, v(f) + p}\,, \tag{104}$$

hieraus durch Funktionsumkehrung $f = f(\tau)$ und dann vollends aus (100) wegen (102)

$$g = \frac{\lambda}{\gamma}\, v\,(f)\,. \tag{105}$$

[Obwohl die Funktionen g und v sich nur um den festen Faktor λ/γ unterscheiden, ist es zweckmäßig, in der Substitution (102) lieber v statt $(\gamma/\lambda)\, g$ zu verwenden, weil dann die Differentialgleichung (103), deren — möglicherweise nur numerisch durchführbare — Integration das Kernstück der ganzen Lösung bildet, nur drei statt vier Parameter enthält.]

Während man sich in Ziff. **6** auf die Anfangswerte $f(0) = 1$, $g(0) = 0$ beschränken durfte, weil dort sowohl für $\lambda > 0$ wie für $\lambda < 0$ die beiden Halbebenen $f > 0$ und $f < 0$ und ebenso die beiden Halbebenen $g > 0$ und $g < 0$ unter sich völlig gleichberechtigt waren und also sich gegenseitig an der g- bzw. f-Achse spiegelten, so muß man hier die allgemeineren Anfangswerte $f(0) = f_0$, $v(0) = v_0$ und entsprechend dann nach (105) $g(0) = g_0 = (\lambda/g)v_0$ zulassen, und somit stellt jetzt ω_0 im allgemeinen nicht mehr den Anfangswert von ω_x dar.

Die Differentialgleichung (103) liefert in Verbindung mit (105) (und wieder mit dem Maßstabsfaktor $\sqrt{1 + \lambda^2}$ auf der f-Achse) die gesuchten Polbahnen. Diese haben in den Punkten mit den Abszissen

$$f^* = \pm\sqrt{\frac{r}{q}} \qquad (r > 0)$$

waagerechte Tangenten und schneiden die Hyperbel

$$f g + \frac{\lambda}{\gamma} p = 0$$

mit lotrechter Tangente. Für $r < 0$ haben die Polbahnen keine waagerechten Tangenten, für $r = 0$ schneiden sie die g-Achse mit waagerechter Wendetangente. Für

$$f_0 = \pm\sqrt{\frac{r}{q}}, \qquad g_0 = \mp\frac{\lambda}{\gamma}\sqrt{\frac{q}{r}}\, p \qquad (r > 0) \tag{106}$$

schrumpfen die Polbahnen auf je einen Punkt zusammen, und dieser stellt die zugehörige permanente Drehung dar, und zwar stets eine l a b i l e für $p \neq 0$.

Weil wir wieder $m_y \geq 0$ voraussetzen dürfen, so liegen gemäß (80) die Polbahnen $r > 0$ in der Ebene I, diejenigen für $r < 0$ in der Polebene II und sind in den beiden Ebenen wieder von ganz verschiedenem Aussehen. Lediglich für $r = 0$ haben sie in den beiden Ebenen gleiche Gestalt.

Da die „labilen" Punkte (106) alle in der Ebene I liegen, so sind in der Ebene I für $r > 0$ l a u t e r a s y m p t o t i s c h e B e w e g u n g e n z w e i t e r A r t zu erwarten, welche in den Punkten (106) asymptotisch münden oder aus ihnen asymptotisch hervorgehen. Für

$r = 0$ und in der der Ebene II für $r < 0$ sind dagegen lauter asymptotische Bewegungen erster Art zu erwarten. Ich lasse die Frage (als Vermutung) offen, ob es in der Ebene I analog zu Ziff. 5 auch zwei Typen von asymptotischen Bewegungen zweiter Art gibt, nämlich solche, die von einem Punkt (106) asymptotisch ausgehend im Gegenpunkt (106) asymptotisch münden, oder solche, die dann in eine asymptotische Bewegung erster Art übergehen. Die Mannigfaltigkeit aller dieser Polbahnen ist, da die Differentialgleichung (103) für einen gegebenen Kreisel (α, β, γ) zwei wesentliche Parameter p und r enthält, sehr groß und soll daher in einer späteren Mitteilung untersucht werden.

8. Achsenfeste zeitabhängige Drehungen bei achsenfester zeitunabhängiger Selbsterregung. Wenn man von den trivialen Fällen der Drehungen um eine der drei Hauptachsen absieht, so war in den vorangehenden Lösungen (Ziff. 2 bis 7) keine einzige enthalten, bei welcher eine Selbsterregung mit achsenfestem zeitunabhängigem Momentvektor $\mathfrak{M}$ eine achsenfeste Drehung hätte erzeugen oder vernichten oder auch nur in ihrer Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{o}$ beeinflussen können. Wir vermuten, daß das überhaupt nicht möglich ist, und wollen diese Vermutung nun beweisen.

Jede zeitabhängige Drehung $\mathfrak{o}$ um eine körperfeste und also auch raumfeste Achse läßt sich in der Form

$$\omega_x = a\,\varphi(t)\,, \quad \omega_y = b\,\varphi(t)\,, \quad \omega_z = c\,\varphi(t)\,, \quad \varphi(t) \not\equiv \text{konst.} \tag{107}$$

ansetzen, wobei a, b, c Festwerte sind. Wir führen zwei körperfeste Vektoren $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{D}$ ein mit den Komponenten

$$\mathfrak{d} = (a, b, c)\,, \qquad \mathfrak{D} = (A\,a\,, B\,b, C\,c)\,. \tag{108}$$

Diese beiden Vektoren fallen beim unsymmetrischen Kreisel wegen (2) dann und nur dann in die gleiche Richtung, wenn zwei der drei Festwerte a, b, c verschwinden, wenn also die Drehung um eine Hauptachse erfolgt. Schließen wir dies weiterhin aus, so definieren die beiden Vektoren $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{D}$ eine körperfeste Ebene E_0 und somit auch einen nichtverschwindenden Produktvektor

$$\mathfrak{E} = [\mathfrak{d}\,\mathfrak{D}]\,, \tag{109}$$

welcher auf den Vektoren $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{D}$ senkrecht steht und also insbesondere zusammen mit dem Vektor $\mathfrak{D}$ eine weitere körperfeste Ebene E_1 definiert, welche den Vektor $\mathfrak{d}$ nicht enthält.

Nunmehr kann man für einen körperfesten Drehvektor $\mathfrak{o}$, der die Komponenten (107) hat, die *Euler*schen Gleichungen (1) in der vektoriellen Gestalt

$$\mathfrak{D}\,\varphi\,(t) + \mathfrak{E}\,\varphi^2\,(t) = \mathfrak{M} \tag{110}$$

schreiben. Hieraus geht hervor, daß der Momentvektor $\mathfrak{M}$, der zu einer Drehung (107) gehört, sich aus zwei nicht dauernd verschwindenden zeitabhängigen Teilen zusammensetzt, also selbst zeitabhängig sein muß. Damit haben wir folgenden Satz bewiesen:

Abgesehen von den Momentvektoren in einer der drei Hauptachsen gibt es keinen körperfesten zeitunabhängigen Momentvektor, der eine Drehung des Kreisels um irgendeine körperfeste und also auch raumfeste Achse erzeugen oder vernichten oder auch nur in ihrer Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{o}$ beeinflussen kann.

Wir wollen dem vektoriellen Beweis dieses Satzes noch einen analytischen Beweis hinzufügen, welcher zeigen wird, daß es zu körperfesten zeitunabhängigen Momentvektoren $\mathfrak{M}$ wohl Lösungen (107) gibt, daß diese aber ebenso wie $\mathfrak{M}$ selbst nicht reell sein können. Zu diesem Zweck gehen wir mit (107) in die Gleichungen (5) bis (7) ein und erhalten

$$\left.\begin{aligned} a\,\dot{\varphi} - \alpha\,b\,c\,\varphi^2 &= m_x\,, \\ b\,\dot{\varphi} + \beta\,c\,a\,\varphi^2 &= m_y\,, \\ c\,\dot{\varphi} - \gamma\,a\,b\,\varphi^2 &= m_z\,. \end{aligned}\right\} \tag{111}$$

Damit diese drei Gleichungen miteinander verträglich sind, d. h. dieselbe Differentialgleichung für die Funktion $\varphi\,(t)$ darstellen, muß mit zwei Konstanten μ und $\varkappa$

$$\frac{m_x}{a} = \frac{m_y}{b} = \frac{m_z}{c} = \mu \tag{112}$$

und

$$\alpha\,\frac{b\,c}{a} = -\,\beta\,\frac{c\,a}{b} = \gamma\,\frac{a\,b}{c} = \varkappa \tag{113}$$

sein, wofür man auch schreiben kann

$$\left.\begin{aligned} \alpha\, b\, c &= \varkappa\, a\,, \\ \beta\, c\, a &= -\varkappa\, b\,, \\ \gamma\, a\, b &= \varkappa\, c\,. \end{aligned}\right\} \tag{114}$$

Durch Multiplikation dieser drei Gleichungen entsteht die Beziehung

$$\alpha\,\beta\,\gamma\, a^2\, b^2\, c^2 = -\varkappa^3\, a\, b\, c\,. \tag{115}$$

Die drei Gleichungen (114) sind für den ausgeschlossenen Fall der Drehung um eine der drei Hauptachsen infolge eines Momentvektors in der betreffenden Hauptachse erfüllt [z. B. $b = 0$, $c = 0$ und dann nach (111) auch $m_y = m_z = 0$ und nach (113) $\varkappa = 0$]. Der Fall, daß nur eine der drei Größen a, b, c verschwindet, führt auf einen Widerspruch mit der Voraussetzung $\varphi \not\equiv$ konst. im Ansatz (107) [z. B. gibt $a = 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ nach (111) sofort $\varphi \equiv$ konst.]. Somit bleibt nur noch der Fall $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ übrig. Für ihn folgt aus (115)

$$\alpha\,\beta\,\gamma\, a\, b\, c = -\varkappa^3$$

und daraus durch Division mit der ersten oder zweiten oder dritten Gleichung (114)

$$a^2 = -\frac{\varkappa^2}{\beta\,\gamma}\,, \qquad b^2 = +\frac{\varkappa^2}{\gamma\,\alpha}\,, \qquad c^2 = -\frac{\varkappa^2}{\alpha\,\beta}\,. \tag{116}$$

Wenn $\varkappa$ reell ist, so müssen also a und c imaginär und b reell sein und folglich nach (112) entweder m_x und m_z imaginär und m_y reell oder m_x und m_z reell und m_y imaginär, je nachdem μ reell oder imaginär ist. Wenn dagegen $\varkappa$ imaginär ist, so verhalten sich a, b, c, m_x, m_y, m_z gerade umgekehrt. Den Fall, daß $\varkappa$ und μ komplex sind, brauchen wir nicht weiter zu erörtern, auch nicht die Lösung selbst, welche z. B. für reelles $\varkappa$ und reelles μ aus einer beliebigen der Gleichungen (111) $\varphi\,(t)$ als reelle arc tg- oder $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}$-Funktion der Zeit ergibt, aber eben keine reelle Bewegung bedeutet.

9. Achsenfeste zeitabhängige Drehungen bei achsenfester zeitabhängiger Selbsterregung. Jetzt wenden wir uns dem allgemeineren Falle zu, daß die Selbsterregung zwar immer noch achsenfest, aber zeitabhängig ist, daß also M_x, M_y und M_z von der Form (8) mit $F\,(t) \not\equiv$ konst. sind. Dann gibt es für $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ eine einzige Möglichkeit, die Vektorgleichung (110) für eine achsenfeste zeitabhängige Drehung (107) und einen achsenfesten zeitabhängigen Momentvektor $\mathfrak{M}$ zu erfüllen: Man muß nämlich nur verlangen, daß in (110) und (8) mit einer reellen Konstanten ϱ

$$\dot{\varphi} = \varrho\, \varphi^2 \tag{117}$$

und

$$F(t) \equiv \varphi^2(t) \tag{118}$$

sein soll. Die Konstante ϱ darf man als von Null verschieden voraussetzen, weil $\varrho = 0$ zufolge (117) auf den Fall $\varphi\,(t) \equiv$ konst. führen würde, welcher die schon anderweitig erledigten stationären Bewegungen des Kreisels bedeutet. Und in (118) kann man eine an sich mögliche multiplikative Konstante unbeschadet der Allgemeinheit weglassen, weil diese schon in den Konstanten M_1, M_2, M_3 von (8) als gemeinsamer Faktor angesehen werden dürfte und für das Endergebnis, wie man leicht erkennt, ohne Wirkung wäre.

Die Gleichheiten (117) und (118) wandeln (110) oder lieber gleich wieder die Komponentengleichungen (1) mit (8) und (107) um in

$$\left.\begin{aligned} \varrho\, A\, a - (B - C)\, b\, c &= M_1\,, \\ \varrho\, B\, b + (A - C)\, c\, a &= M_2\,, \\ \varrho\, C\, c - (A - B)\, a\, b &= M_3\,, \end{aligned}\right\} \tag{119}$$

wenn wir den gänzlich trivialen Fall $\varphi\,(t) \equiv 0$ der Ruhe [$\mathfrak{v} = 0$ und also nach (110) $\mathfrak{M} = 0$] ausschließen.

Diese drei Gleichungen sind zwar bei vorgegebenen Werten M_1, M_2, M_3 algebraisch nicht ohne weiteres nach a, b, c aufzulösen (jedenfalls wollen wir dies hier nicht tun); wohl aber folgen aus ihnen bei vorgeschriebenen Werten von a, b, c und ϱ ohne weiteres die Momentkonstanten M_1, M_2, M_3.

Aus (117) ergibt sich schließlich, wenn wir der Zeit $t = 0$ den Funktionswert $\varphi = \infty$ zuordnen, was, wie wir sehen werden, ohne wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit erlaubt ist,

$$\varphi(t) = -\frac{1}{\varrho\, t}. \tag{120}$$

Man kann das Ergebnis, das in den Formeln (120) samt (107) und in (119) samt (8) und (118) enthalten ist, in dem folgenden Satz zusammenfassen:

Eine achsenfeste zeitabhängige Drehung des Kreisels mit einem körper- und also auch raumfesten Drehvektor $\mathfrak{v}$, der die Komponenten

$$\omega_x = -\frac{a}{\varrho\, t}, \quad \omega_y = -\frac{b}{\varrho\, t}, \quad \omega_z = -\frac{c}{\varrho\, t} \qquad (\varrho \gtrless 0) \tag{121}$$

besitzt, kann durch eine achsenfeste zeitabhängige Selbsterregung mit einem (seiner Lage nach körperfesten, aber im allgemeinen nicht raumfesten) Momentvektor $\mathfrak{M}$, der die Komponenten

$$\left.\begin{aligned} M_x &= [\varrho\, A\, a - (B - C)\, b\, c]\frac{1}{\varrho^2 t^2}, \\ M_y &= [\varrho\, B\, b + (A - C)\, c\, a]\frac{1}{\varrho^2 t^2}, \\ M_z &= [\varrho\, C\, c - (A - B)\, a\, b]\frac{1}{\varrho^2 t^2} \end{aligned}\right\} \tag{122}$$

besitzt, unterhalten werden, und die Momente mit den Komponenten (122) sind — abgesehen von einer unwesentlichen Zeittransformation $t = t' - t_1$ — die einzigen zeitabhängigen, ihrer Lage nach körperfesten Momente, die bei einem unsymmetrischen Kreisel eine zeitabhängige Drehung um eine körper- und raumfeste Achse, die keine Hauptachse ist, zu unterhalten vermögen.

Man bestätigt auch schon durch Einsetzen von (121) und (122) in die *Euler*schen Gleichungen (1) die Richtigkeit des ersten Teiles dieses Satzes; der vorgetragene Beweis zeigt aber insbesondere die Gültigkeit des zweiten Teiles des Satzes (Einzigkeit jener Momente). Im übrigen muß betont werden, daß die Momente (122) niemals den Kreisel aus völliger Ruhe in Bewegung zu setzen oder eine schon vorhandene Bewegung völlig zur Ruhe zu bringen vermögen, weil diese Ruhezustände zu $t = \pm\infty$ gehören: es gibt zufolge des zweiten Teiles unseres Satzes überhaupt kein körperfestes Moment $\mathfrak{M}$, das für eine Drehung um eine körperfeste Achse, die keine Hauptachse ist, hierzu in der Lage wäre.

Das Ergebnis (122) läßt eine einfache Deutung zu, die wir für die Annahme formulieren wollen, daß der Anfangspunkt der Zeit bei einem hinreichend stark negativen Wert t_0 liegt, und daß die Zeit dann bis in die Nähe von $t = 0$ zunimmt. In diesem Falle stellt der erste Bestandteil $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{D}\,\dot{\varphi}$ des Momentvektors (110) mit seinen Komponenten

$$M_{x1} = \frac{A\, a}{\varrho\, t^2}, \qquad M_{y1} = \frac{B\, b}{\varrho\, t^2}, \qquad M_{z1} = \frac{C\, c}{\varrho\, t^2}, \tag{123}$$

die die ersten Glieder rechts in (122) sind, das Antriebsmoment vor, welches von einer kleinen, schon vorhandenen Anfangsdrehung

$$\omega_{x0} = \frac{a}{\varrho\,(-t_0)}, \qquad \omega_{y0} = \frac{b}{\varrho\,(-t_0)}, \qquad \omega_{z0} = \frac{c}{\varrho\,(-t_0)} \tag{124}$$

aus die Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Kreisels immer mehr vergrößert und für $t \to 0$ über alle Grenzen wachsen läßt. Der zweite Bestandteil $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{E}\,\varphi^2$ des Momentvektors (110) mit seinen Komponenten

$$\left.\begin{aligned} M_{x2} &= -\frac{(B - C)\, b\, c}{\varrho^2 t^2}, \\ M_{y2} &= +\frac{(A - C)\, c\, a}{\varrho^2 t^2}, \\ M_{z2} &= -\frac{(A - B)\, a\, b}{\varrho^2 t^2}, \end{aligned}\right\} \tag{125}$$

die die zweiten Glieder rechts in (122) sind, stellt das Moment vor, welches nötig ist, um das bei dieser beschleunigten Drehung geweckte Fliehkraftmoment zu kompensieren und so die Drehachse in ihrer Lage festzuhalten.

Bei positiven Werten von a, b, c und ϱ liegt für $t < 0$ der Drehvektor $\mathfrak{v}$ in dem Oktanten ($x > 0$, $y > 0$, $z > 0$), ebenso der Momentvektor $\mathfrak{M}_1$ (123), wogegen der Momentvektor $\mathfrak{M}_2$ (125) in dem Oktanten ($x < 0$, $y > 0$, $z < 0$) liegt und sowohl auf dem Drehvektor $\mathfrak{v}$ wie auf dem Momentvektor $\mathfrak{M}_1$ senkrecht steht, weil $\mathfrak{v}$ richtungsgleich mit $\mathfrak{d}$, ferner $\mathfrak{M}_1$ richtungsgleich mit $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{M}_2$ richtungsgleich mit $\mathfrak{E}$ ist, und weil zufolge (109) $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{D}$ senkrecht steht. In welchem Oktanten der resultierende Momentvektor $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$ liegt, das hängt von den Werten a, b, c, A, B, C und ϱ ab.

Wenn der Drehvektor in einem anderen Oktanten liegt, so liegt auch der erste Momentvektor $\mathfrak{M}_1$ im gleichen Oktanten wie $\mathfrak{v}$, wogegen die oktantenmäßige Zuordnung zwischen $\mathfrak{v}$ und dem zweiten Momentvektor $\mathfrak{M}_2$ genau die gleiche ist, die ich schon für die stationären Drehungen und ihr unterhaltendes Moment gefunden habe [1].

Für positive t bedeutet die Lösung (121), (122) das Abbremsen einer körper- und raumfesten Drehung durch ein körperfestes zeitabhängiges Moment, wobei aber, wie schon erwähnt, die Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ erst mit $t \to \infty$ gegen Null geht.

Will man negative Zeiten t beim Anlaufen des Kreisels vermeiden, so hat man lediglich die Zeit t in allen Formeln durch eine Zeit t' vermittels der Transformation $t = t' - t_1$ mit hinreichend großem positivem Festwert t_1 zu ersetzen, und man erkennt dabei, daß in der Tat die bei der Integration von (117) benützte Zuordnung von $t = 0$ und $\varphi = \infty$ ganz unwesentlich ist und nur zur Vereinfachung der Formeln diente.

10. Achsenfeste zeitabhängige Drehungen bei achsenbeweglicher Selbsterregung. Jetzt bleibt noch die Frage übrig, wie eine achsenfeste zeitabhängige Drehung — da sie, abgesehen von den trivialen Fällen der Drehungen um eine der drei Hauptachsen und abgesehen von dem Fall von Ziff. 9 durch kein achsenfestes Moment $\mathfrak{M}$ beeinflußbar ist und, wieder abgesehen von jenen trivialen Fällen, insbesondere nicht durch ein achsenfestes Moment $\mathfrak{M}$ erzeugt oder vernichtet werden kann — wenigstens durch ein a c h s e n b e w e g l i c h e s Moment beeinflußt und insbesondere erzeugt oder vernichtet zu werden vermag. Die Antwort auf diese Frage ist schon in der Formel (110) vollständig enthalten und kann in dem folgenden S a t z ausgesprochen werden (der für praktische Anwendungen offenbar wichtig ist):

Abgesehen von den trivialen Fällen der Drehungen um eine der drei Hauptachsen kann eine Drehung um irgendeine körperfeste und also auch raumfeste Achse nur durch eine a c h s e n b e w e g l i c h e Selbsterregung erzeugt oder vernichtet oder allgemein zeitlich anders reguliert werden als die Drehungen von Ziff. 9, und zwar wandert dabei der Momentvektor $\mathfrak{M}$ nicht beliebig im Kreisel, sondern lediglich in einer körperfesten Ebene E_1, welche durch die Vektoren $\mathfrak{D}$ (108) und $\mathfrak{E}$ (109) bestimmt ist.

Der erste Bestandteil $\mathfrak{D}\,\varphi$ von $\mathfrak{M}$ (110) muß dabei, wie in Ziff. 9, die Drehgeschwindigkeit regulieren; der zweite Bestandteil $\mathfrak{E}\,\varphi^2$ muß das Fliehkraftmoment kompensieren, und seine oktantenmäßige Zuordnung zum Drehvektor $\mathfrak{v}$ ist auch in diesem allgemeinen Falle wieder die gleiche wie bei den stationären Drehungen.

Wenn insbesondere die Drehung $\mathfrak{v}$ von der Ruhe aus gleichförmig beschleunigt anlaufen soll, wenn also $\varphi(t) \equiv t$ ist, so wird der erste Bestandteil $\mathfrak{D}\,\dot{\varphi}$ von $\mathfrak{M}$ der konstante (körperfeste) Vektor $\mathfrak{D}$, wogegen der zweite Bestandteil $\mathfrak{E}\,\varphi^2 \equiv \mathfrak{E}\,t^2$ mit konstanter Beschleunigung zunimmt. Die Pfeilspitze des Momentvektors $\mathfrak{M}$ läuft dann also mit konstanter Beschleunigung $2\,\mathfrak{E}$ auf einer körperfesten Geraden, die parallel zum Vektor $\mathfrak{E}$ durch die Pfeilspitze des Vektors $\mathfrak{D}$ geht, und der Vektor $\mathfrak{M}$ nähert sich mit unbegrenzt anwachsendem Betrag asymptotisch der Richtung des Vektors $\mathfrak{E}$, der senkrecht zur Drehachse steht.

11. Zusammenfassung. Wir können alle bisherigen Erkenntnisse über die Selbsterregung des unsymmetrischen Kreisels dahin zusammenfassen, daß — abgesehen von den trivialen Fällen der Drehungen um jede der drei Hauptachsen und abgesehen von den permanenten Drehungen um beliebige Achsen — zu jeder achsenfesten zeitunabhängigen Selbsterregung achsenbewegliche Drehungen gehören, wie wir solche in Ziff. 2 bis 7 untersucht haben; ferner daß es, wieder abgesehen von jenen trivialen Fällen, nur den einzigen Typ der achsenfesten zeitabhängigen

[1] *R. Grammel*, Ing.-Arch. 21 (1953), S. 151.

Selbsterregung von Ziff. 9 gibt, welche eine achsenfeste zeitabhängige Drehung zu beeinflussen, wenn auch weder zu erzeugen noch zu vernichten vermag; endlich daß der Momentvektor $\mathfrak{M}$ der Selbsterregung, welcher eine beliebige achsenfeste Drehung erzeugen oder vernichten oder in beliebiger Weise beeinflussen soll, im allgemeinen (also abgesehen von den trivialen Fällen und von dem Fall in Ziff. 9) zeitabhängig in einer körperfesten Ebene wandern muß. Die achsenbeweglichen Drehungen, welche von achsenfester zeitunabhängiger Selbsterregung erzeugt oder unterhalten werden, sind je nach der Lage (und Größe) des Momentes $\mathfrak{M}$ der Selbsterregung periodisch hinsichtlich der Bewegung des Drehvektors $\mathfrak{d}$ im Kreisel oder asymptotisch mit unbeschränkt wachsendem Drehvektor $\mathfrak{d}$ oder asymptotisch mit einem Drehvektor $\mathfrak{d}$, der sich einem permanenten Drehvektor (von endlichem Betrag) annähert (oder auch sich von ihm entfernt).

(Eingegangen am 23. Januar 1953.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. *Richard Grammel*, Stuttgart-N., Robert-Bosch-Straße 101.

Theorie der elastischen Ringe starker Krümmung.

Von F. K. G. Odqvist.

1. Einleitung. Die technische Theorie stark gekrümmter Stäbe geht auf die ersten Jahrzehnte des vorigen Jahrhunderts zurück und zählt als Urheber *Navier*, *Bresse* und *Resal*. Eine vollständige Behandlung findet sich bei *E. Winkler* und wurde später in den meisten Lehrbüchern der Festigkeitslehre abgedruckt [1]. Hier handelt es sich ausschließlich um Stäbe mit in bezug auf die Schwerpunktsebene symmetrischen Querschnitt. Die äußere Belastung findet sich auch in dieser Ebene.

Neuere Untersuchungen der Stäbe starker Krümmung behandeln meistens nur spezielle Belastungsfälle. Eine Reihe von Untersuchungen knüpfen an eine Arbeit von *O. Göhner* über Spiralfedern [2] an. Wichtige Arbeiten insbesondere über geschlossene Ringe und deren Umstülpung rühren von *R. Grammel* her [2].

Im Folgenden wird das Problem des stark gekrümmten, offenen oder geschlossenen Kreisringes vom beliebigen Querschnitt neu aufgegriffen, teils um allgemeinere Lastsysteme zuzulassen, teils um eines der Ergebnisse von *R. Grammel* noch ein wenig zu erweitern.

2. Die Gleichgewichtsbedingungen. Um die Geometrie des gekrümmten Stabes in der Form eines Kreisringstückes vom Halbmesser r zu beschreiben, wird ein bewegliches Koordinatensystem laut Abb. 1 eingeführt mit $x = r\varphi$ als Bogenlänge der Schwerpunktslinie, y in radialer Richtung positiv nach außen und z in achsialer Richtung nach oben. Am Bogenelement greifen die Schnittgrößen M_φ, M_z (Biegemomente), M_t (Torsionsmoment), Q, T (Schubkräfte in axialer bzw. radialer Richtung) und N (Normalkraft) an (Abb. 2 und 3).

Die streckenweise stetig verteilten äußeren Kräfte werden je Längeneinheit der Schwerpunktslinie aufgelöst in p, q, t (in radialer, bzw. axialer und tangentialer Richtung). Dazu wird noch ein stetig verteiltes Drillingsmoment m je Längeneinheit

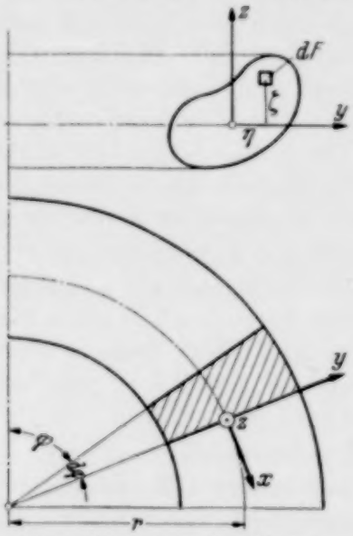


Abb. 1. Allgemeines Koordinatensystem für ein Kreisringstück.

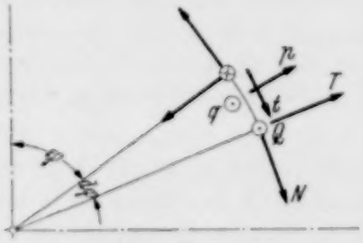


Abb. 2. Kräfte am Bogenelement.

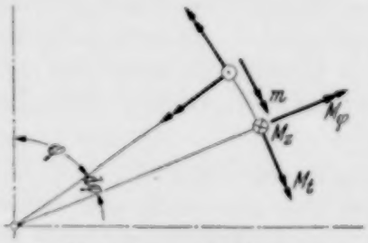


Abb. 3. Momentenzeiger am Bogenelement.

angenommen. Sodann lauten die Gleichgewichtsbedingungen am Bogenelement

$$dN + T\,d\varphi + t\,r\,d\varphi = 0\,, \tag{1}$$

$$dT - N\,d\varphi + p\,r\,d\varphi = 0\,, \tag{2}$$

$$dQ + q\,r\,d\varphi = 0\,, \tag{3}$$

$$dM_t + M_\varphi\,d\varphi + m\,r\,d\varphi = 0\,, \tag{4}$$

$$dM_\varphi - M_t\,d\varphi - Q\,r\,d\varphi = 0\,, \tag{5}$$

$$dM_z - T\,r\,d\varphi = 0\,. \tag{6}$$

[1] Siehe *I. Todhunter* u. *K. Pearson*, A History of the Theory of Elasticity . . ., Bd. II, 1, S. 422, Cambridge 1893.

[2] Siehe *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, Technische Dynamik, S. 305—404, Berlin 1939, in der nach Abschluß des Manuskripts erschienenen 2. Auflage: Bd. I, S. 339—438.

Hier ist r der Krümmungshalbmesser der Schwerpunktslinie. Es wird wie allgemein in der Statik die Verzerrung des Stabes so klein angenommen, daß die Schnittgrößen ebenso gut auf das verzerrte wie auf das unverzerrte Element bezogen werden können.

Im statisch bestimmten Falle lassen sich die Gleichungen (1) bis (6) unmittelbar durch Quadraturen integrieren. Insofern unterscheidet sich der von uns behandelte Fall des stark gekrümmten Ringes keineswegs von dem von *Biezeno* und *Grammel* behandelten Fall des schwach gekrümmten Ringes. Wir wollen jedoch die Integration etwas verschieden durchführen. Wenn die Anfangsgrößen für $\varphi = 0$ der betreffenden Schnittgrößen mit N_0, T_0, Q_0, M_{t0}, $M_{\varphi 0}$ und M_{z0} bezeichnet werden, bekommen wir mit elementaren Methoden

$$N = N_0 \cos\varphi - T_0 \sin\varphi + \int_0^\varphi [p\, r \sin(\varphi - \lambda) - t\, r \cos(\varphi - \lambda)]\, d\lambda\,, \tag{7}$$

$$T = T_0 \cos\varphi + N_0 \sin\varphi - \int_0^\varphi [p\, r \cos(\varphi - \lambda) + t\, r \sin(\varphi - \lambda)]\, d\lambda\,, \tag{8}$$

$$Q = Q_0 - \int_0^\varphi q\, r\, d\lambda\,, \tag{9}$$

$$M_t = (M_{t0} + Q_0\, r)\cos\varphi - M_{\varphi 0}\sin\varphi - Q_0\, r + \int_0^\varphi q\, r^2\, d\lambda - \int_0^\varphi (m\, r + q\, r^2)\cos(\varphi - \lambda)\, d\lambda\,, \tag{10}$$

$$M_\varphi = (M_{t0} + Q_0\, r)\sin\varphi + M_{\varphi 0}\cos\varphi - \int_0^\varphi (m\, r + q\, r^2)\sin(\varphi - \lambda)\, d\lambda\,, \tag{11}$$

$$M_z = M_{z0} + T_0\, r \sin\varphi + N_0\, r\,(1 - \cos\varphi) - \int_0^\varphi \{p\, r^2 \sin(\varphi - \lambda) + t\, r^2 [1 - \cos(\varphi - \lambda)]\}\, d\lambda\,. \tag{12}$$

In diesen Integralen sind p, q, t und m als Funktionen der Integrationsveränderlichen λ aufzufassen. Die Lösungen (7) bis (12) lassen sich in zwei Gruppen zerlegen (7), (8), (12) bzw. (9), (10), (11), wobei die Anfangswerte, die in je einer Gruppe auftreten, unabhängig von denjenigen der anderen angenommen werden können. Belastungsfälle der einen Gruppe lassen sich daher unabhängig von denjenigen der anderen lösen, jedenfalls sofern es sich um statisch bestimmte Lastfälle handelt.

3. Deformationshypothese, Spannungsverteilung. Um die innere Spannungsverteilung des Stabes zu bestimmen, muß man etwa wie in der technischen Biegetheorie gerader Balken auf die Deformation näher eingehen. Für die Ringdehnung ε in der x-Richtung genügt hierbei die *Bernoulli*sche Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte. Der Verschiebungsvektor der

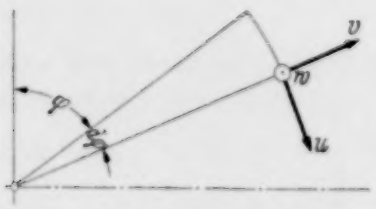


Abb. 4. Verschiebungsvektor.

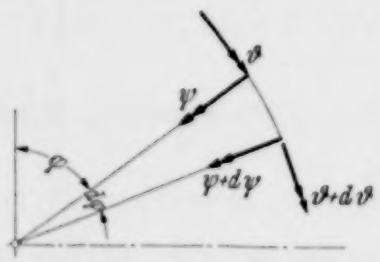


Abb. 5. Winkeländerungen am Bogenelement.

Schwerpunktslinie sei mit u, v, w bezeichnet (Abb. 4). Wenn Differentiationen in bezug auf φ mit Strichen angedeutet werden, bekommen wir für die Winkelabweichung ψ der Tangente der Schwerpunktslinie aus ihrer Ebene

$$\psi = \frac{w'}{r}\,.$$

Die Ringdehnung der Schwerpunktslinie selbst wird sein

$$\frac{du}{r\, d\varphi} + \frac{v}{r} = \frac{u' + v}{r}\,.$$

Wenn der Stab dazu noch eine Drillung um die Schwerpunktslinie um einen Winkel ϑ erfährt (positiv im Uhrzeigersinn, wenn in der Richtung positiver φ betrachtet; Abb. 5), dann wird sich eine beliebige Ringfaser von der Länge $(r + \eta)\, d\varphi$ beim Flächenelement dF des Querschnittes

um den Betrag

$$\frac{r\,d\varphi\,(u'+v)}{r} - \zeta\,\vartheta\,d\varphi - \zeta\,d\psi - r\,d\varphi\,\eta\,\frac{v''}{r^2}$$

dehnen als Folge der Verschiebung und der Winkeländerungen ϑ und $d\psi$.

Die *Bernoulli*sche Hypothese drückt sich somit durch die folgende Gleichung aus:

$$\varepsilon = \frac{1}{r+\eta}\left[u' + v - \zeta\,(\vartheta + \psi') - \eta\,\frac{v''}{r}\right]. \tag{13}$$

Unter Heranziehung des *Hooke*schen Gesetzes bekommt man sodann für die Spannungsverteilung

$$\sigma = E\,\varepsilon \tag{14}$$

unter der Voraussetzung, daß u, v, w und ϑ bekannte Funktionen von φ sind.

4. Die Grundgleichungen. Die Äquivalenz äußerer und innerer Kräfte beim Querschnitt φ ergibt

$$N = \int \sigma\,dF\,, \tag{15}$$

$$M_\varphi = \int \sigma\zeta\,dF\,, \tag{16}$$

$$M_z = \int \sigma\,\eta\,dF\,. \tag{17}$$

Wir führen die Bezeichnungen

$$\int dF = F\,, \tag{18}$$

$$\int \frac{\zeta\,\eta\,dF}{1+\eta/r} = D\,, \tag{19}$$

$$\int \frac{\eta^2\,dF}{1+\eta/r} = J\,, \tag{20}$$

$$\int \frac{\zeta^2\,dF}{1+\eta/r} = I \tag{21}$$

ein und bekommen alsdann

$$\int \frac{dF}{r+\eta} = \frac{1}{r}\left(F + \frac{J}{r^2}\right), \tag{22}$$

$$\int \frac{\zeta\,dF}{r+\eta} = -\frac{D}{r^2}\,, \tag{23}$$

$$\int \frac{\eta\,dF}{r+\eta} = -\frac{J}{r^2}\,. \tag{24}$$

Wird schließlich

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{D}\,(IJ - D^2) &= J_1\,, \\ \frac{1}{J}\,(IJ - D^2) &= J_2\,, \\ \frac{1}{I}\,(IJ - D^2) &= J_3 \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

gesetzt, so bekommen wir nach Einführung von (13) und (14) in (15) bis (17) unter Benutzung von (18) bis (24)

$$\frac{N\,r^3}{E} = (u'+v)\,(F\,r^2 + J) + r\,(\vartheta + \psi')\,D + v''\,J \tag{26}$$

$$\frac{M_\varphi\,r^2}{E} = -\,(u'+v)\,D - r\,(\vartheta+\psi')\,I - v''\,D\,, \tag{27}$$

$$\frac{M_z\,r^2}{E} = -\,(u'+v)\,J - r\,(\vartheta+\psi')\,D - v''\,J\,. \tag{28}$$

Wird nach den Deformationsgrößen aufgelöst so bekommen wir

$$u' + v = \frac{N r + M_z}{E F}, \tag{29}$$

$$\vartheta + \psi' = -\frac{M_\varphi r}{E J_2} + \frac{M_z r}{E J_1}, \tag{30}$$

$$v'' = \frac{M_\varphi r^2}{E J_1} - \frac{M_z r^2}{E J_3} - \frac{N r + M_z}{E F}. \tag{31}$$

Wenn (29) bis (31) in (13) und (14) eingetragen werden, so ersieht man sofort, daß die Verteilung der Normalspannung durch die Werte von N, M_φ und M_z allein bedingt ist [vgl. später Gleichung (33′)].

Aus der Abb. 5 ist ersichtlich, daß der Zuwachs $d\vartheta - \psi\, d\varphi$ des Drillungswinkels am Element $r\, d\varphi$ der Schwerpunktslinie durch das Torsionsmoment M_t bedingt sein muß. Wir setzen demnach an

$$\vartheta' - \psi = \frac{M_t r}{G K}, \tag{32}$$

wo in erster Annäherung GK als die Verdrehungssteifigkeit des geraden Stabes vom selben Querschnitt angenommen werden kann.

Die in (32) steckende Hypothese ist zweifellos die fragwürdigste der ganzen Theorie. Sie wird im Folgenden nur deswegen eingeführt weil wir eine Kupplungsbedingung zwischen ϑ und ψ nötig haben. Noch schlechter begründet wäre eine nachträgliche Bestimmung der Schubspannungen über den Querschnitt aus M_t und der *St-Venant*schen Theorie der Verdrehung prismatischer Stäbe. Nachdem die rechterhand in den Gleichungen (29) bis (32) auftretenden Größen laut (7) bis (12) bekannt sind, ersieht man sofort, daß wir ein vollständiges System von Grundgleichungen zur Bestimmung der Größen u, v, w und ϑ als Funktionen von φ bekommen haben.

Der Kürze halber führen wir im Folgenden die Bezeichnungen

$$\frac{1}{E F} = \alpha, \quad \frac{r}{E J_1} = \beta_1, \quad \frac{r}{E J_2} = \beta_2, \quad \frac{r}{E J_3} = \beta_3, \quad \frac{r}{G K} = \gamma \tag{33}$$

ein und wollen uns auf den Fall beschränken, daß α, β_1, β_2, β_3 und γ konstant sind, obgleich dies an sich nicht notwendig wäre. Mit diesen Bezeichnungen ergibt sich nach (14) und (29) bis (31) für die Spannungsverteilung im Querschnitt

$$\sigma = \frac{E}{r + \eta}\left\{\alpha(N r + M_z) - \zeta(-\beta_2 M_\varphi + \beta_1 M_z) - \eta\left[\beta_1 M_\varphi - \beta_3 M_z - \frac{\alpha}{r}(N r + M_z)\right]\right\}. \tag{33′}$$

5. Integration der Grundgleichungen. Als Anfangsbedingungen für $\varphi = 0$ für die Deformationsgrößen werden angenommen

$$u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0, \quad v'(0) = v_0', \quad w(0) = w_0, \quad w'(0) = \psi(0) = \psi_0, \quad \vartheta(0) = \vartheta_0. \tag{34}$$

Wir fangen mit (31) an und bekommen mit Rücksicht auf (33) nach ein- und zweimaliger Integration

$$v' = v_0' + \beta_1 r \int_0^\varphi M_\varphi\, d\lambda - (\alpha + \beta_3 r) \int_0^\varphi M_z\, d\lambda - \alpha r \int_0^\varphi N\, d\lambda, \tag{35}$$

$$v = v_0 + v_0'\varphi + \beta_1 r \int_0^\varphi \int_0^{\lambda_1} M_\varphi\, d\lambda\, d\lambda_1 - (\alpha + \beta_3 r) \int_0^\varphi \int_0^{\lambda_1} M_z\, d\lambda\, d\lambda_1 - \alpha r \int_0^\varphi \int_0^{\lambda_1} N\, d\lambda\, d\lambda_1. \tag{36}$$

Die Integrale in (35) und (36) können mit Hilfe von (7), (11) und (12) berechnet werden und durch Benutzung der Integralformel von *Lejeune-Dirichlet* vereinfacht werden. Für die Anwendung hier und im Folgenden erhalten wir so die Formelsammlung

$$\int_0^\varphi N\, d\lambda = N_0 \sin\varphi - T_0(1 - \cos\varphi) + \int_0^\varphi \{p r [1 - \cos(\varphi - \lambda)] - t r \sin(\varphi - \lambda)\}\, d\lambda, \tag{37}$$

$$\int_0^{\varphi}\int_0^{\lambda_1} N\,d\lambda\,d\lambda_1 = N_0(1-\cos\varphi) - T_0(\varphi-\sin\varphi) + \int_0^{\varphi}\{p\,r[\varphi-\lambda-\sin(\varphi-\lambda)] - t\,r[1-\cos(\varphi-\lambda)]\}\,d\lambda\,, \tag{38}$$

$$\int_0^{\varphi}\int_0^{\lambda_1}\int_0^{\lambda_2} N\,d\lambda\,d\lambda_1\,d\lambda_2 = N_0(\varphi-\sin\varphi) - T_0(\tfrac{1}{2}\varphi^2-1+\cos\varphi) + \int_0^{\varphi}\{p\,r[\tfrac{1}{2}(\varphi-\lambda)^2-1+\cos(\varphi-\lambda)] - t\,r[\varphi-\lambda-\sin(\varphi-\lambda)]\}\,d\lambda\,, \tag{39}$$

$$\int_0^{\varphi} M_\varphi\,d\lambda = (M_{t0}+Q_0\,r)(1-\cos\varphi) + M_{\varphi 0}\sin\varphi - \int_0^{\varphi}(m\,r+q\,r^2)[1-\cos(\varphi-\lambda)]\,d\lambda\,, \tag{40}$$

$$\int_0^{\varphi}\int_0^{\lambda_1} M_\varphi\,d\lambda\,d\lambda_1 = (M_{t0}+Q_0\,r)(\varphi-\sin\varphi) + M_{\varphi 0}(1-\cos\varphi) - \int_0^{\varphi}(m\,r+q\,r^2)[\varphi-\lambda-\sin(\varphi-\lambda)]\,d\lambda\,, \tag{41}$$

$$\int_0^{\varphi}\int_0^{\lambda_1}\int_0^{\lambda_2} M_\varphi\,d\lambda\,d\lambda_1\,d\lambda_2 = (M_{t0}+Q_0\,r)(\tfrac{1}{2}\varphi^2-1+\cos\varphi) + M_{\varphi 0}(\varphi-\sin\varphi) - \int_0^{\varphi}(m\,r+q\,r^2)[\tfrac{1}{2}(\varphi-\lambda)^2-1+\cos(\varphi-\lambda)]\,d\lambda\,. \tag{42}$$

$$\int_0^{\varphi} M_s\,d\lambda = M_{s0}\,\varphi + T_0\,r(1-\cos\varphi) + N_0\,r(\varphi-\sin\varphi) - \int_0^{\varphi}\{p\,r^2[1-\cos(\varphi-\lambda)] + t\,r^2[\varphi-\lambda-\sin(\varphi-\lambda)]\}\,d\lambda\,, \tag{43}$$

$$\int_0^{\varphi}\int_0^{\lambda_1} M_s\,d\lambda\,d\lambda_1 = \tfrac{1}{2}M_{s0}\varphi^2 + T_0\,r(\varphi-\sin\varphi) + N_0\,r(\tfrac{1}{2}\varphi^2-1+\cos\varphi) - \int_0^{\varphi}\{p\,r^2[\varphi-\lambda-\sin(\varphi-\lambda)] + t\,r^2[\tfrac{1}{2}(\varphi-\lambda)^2-1+\cos(\varphi-\lambda)]\}\,d\lambda\,, \tag{44}$$

$$\int_0^{\varphi}\int_0^{\lambda_1}\int_0^{\lambda_2} M_s\,d\lambda\,d\lambda_1\,d\lambda_2 = \tfrac{1}{6}M_{s0}\varphi^3 + T_0\,r(\tfrac{1}{2}\varphi^2-1+\cos\varphi) + N_0\,r(\tfrac{1}{6}\varphi^3-\varphi+\sin\varphi) - \int_0^{\varphi}\{p\,r^2[\tfrac{1}{2}(\varphi-\lambda)^2-1+\cos(\varphi-\lambda)] + t\,r^2[\tfrac{1}{6}(\varphi-\lambda)^3-(\varphi-\lambda)+\sin(\varphi-\lambda)]\}\,d\lambda\,. \tag{45}$$

Im nächsten Schritt bestimmt man u aus (29):

$$u = u_0 - \int_0^{\varphi} v\,d\lambda + \alpha\,r\int_0^{\varphi} N\,d\lambda + \alpha\int_0^{\varphi} M_s\,d\lambda\,, \tag{46}$$

worin die letzten beiden Integrale durch (37) und (43) gegeben sind und das erste Integral folgendermaßen zu bilden ist:

$$\int_0^{\varphi} v\,d\lambda = v_0\,\varphi + \tfrac{1}{2}v_0'\,\varphi^2 + \beta_1\,r\int_0^{\varphi}\int_0^{\lambda_1}\int_0^{\lambda_2} M_\varphi\,d\lambda\,d\lambda_1\,d\lambda_2 - (\alpha+\beta_3\,r)\int_0^{\varphi}\int_0^{\lambda_1}\int_0^{\lambda_2} M_s\,d\lambda\,d\lambda_1\,d\lambda_2 - \alpha\,r\int_0^{\varphi}\int_0^{\lambda_1}\int_0^{\lambda_2} N\,d\lambda\,d\lambda_1\,d\lambda_2\,. \tag{47}$$

Die hier auftretenden neuen Integrale sind unter den oben berechneten enthalten, nämlich (42), (45) und (39).

Aus (30) und (32) erhalten wir

$$\psi'' + \psi = -\gamma\,M_t - \beta_2\,M_\varphi' + \beta_1\,M_s'\,, \tag{48}$$

eine Differentialgleichung, deren Integral nach Befriedigung der Anfangsbedingung

$$\psi = \psi_0 \cos\varphi - (\vartheta_0 + \beta_2 M_{\varphi 0} - \beta_1 M_{z0}) \sin\varphi - \gamma \int_0^\varphi M_t \sin(\varphi - \lambda)\, d\lambda$$
$$- \beta_2 \int_0^\varphi M'_\varphi \sin(\varphi - \lambda)\, d\lambda + \beta_1 \int_0^\varphi M'_z \sin(\varphi - \lambda)\, d\lambda \qquad (49)$$

lautet. Gleichzeitig bekommen wir

$$\vartheta = (\vartheta_0 + \beta_2 M_{\varphi 0} - \beta_1 M_{z0}) \cos\varphi + \psi_0 \sin\varphi - \gamma \int_0^\varphi M_t \cos(\varphi - \lambda)\, d\lambda$$
$$+ \beta_2 \int_0^\varphi M'_\varphi \cos(\varphi - \lambda)\, d\lambda - \beta_1 \int_0^\varphi M'_z \cos(\varphi - \lambda)\, d\lambda - \beta_2 M_\varphi + \beta_1 M_z . \qquad (50)$$

Durch partielle Integration ergibt sich

$$\int_0^\varphi M'_\varphi \sin(\varphi - \lambda)\, d\lambda = - M_{\varphi 0} \sin\varphi + \int_0^\varphi M_\varphi \cos(\varphi - \lambda)\, d\lambda \qquad (51)$$

und

$$\int_0^\varphi M'_\varphi \cos(\varphi - \lambda)\, d\lambda = M_\varphi - M_{\varphi 0} \cos\varphi - \int_0^\varphi M_\varphi \sin(\varphi - \lambda)\, d\lambda \qquad (52)$$

und zwei ähnliche Formeln für M_z anstatt M_φ. Durch Benutzung von (51) und (52) lassen sich (49) und (50) vereinfachen, so daß kommt

$$\psi = \psi_0 \cos\varphi - \vartheta_0 \sin\varphi - \gamma \int_0^\varphi M_t \sin(\varphi - \lambda)\, d\lambda$$
$$- \beta_2 \int_0^\varphi M_\varphi \cos(\varphi - \lambda)\, d\lambda + \beta_1 \int_0^\varphi M_z \cos(\varphi - \lambda)\, d\lambda , \qquad (53)$$

$$\vartheta = \vartheta_0 \cos\varphi + \psi_0 \sin\varphi + \gamma \int_0^\varphi M_t \cos(\varphi - \lambda)\, d\lambda$$
$$- \beta_2 \int_0^\varphi M_\varphi \sin(\varphi - \lambda)\, d\lambda + \beta_1 \int_0^\varphi M_z \sin(\varphi - \lambda)\, d\lambda . \qquad (54)$$

Wenn (10) bis (12) in (53) und (54) eingetragen werden, bekommt man für die dort auftretenden Integrale

$$\int_0^\varphi M_t \sin(\varphi - \lambda)\, d\lambda = \tfrac{1}{2} (M_{t0} + Q_0 r)(\varphi \sin\varphi) - \tfrac{1}{2} M_{\varphi 0} (\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)$$
$$- Q_0 r (1 - \cos\varphi) + \int_0^\varphi q r^2 [1 - \cos(\varphi - \lambda)]\, d\lambda$$
$$- \tfrac{1}{2} \int_0^\varphi (m r + q r^2) [(\varphi - \lambda) \sin(\varphi - \lambda)]\, d\lambda, \qquad (55)$$

$$\int_0^\varphi M_t \cos(\varphi - \lambda)\, d\lambda = \tfrac{1}{2} (M_{t0} + Q_0 r)(\sin\varphi + \varphi\cos\varphi) - \tfrac{1}{2} M_{\varphi 0} (\varphi \sin\varphi) - Q_0 r \sin\varphi$$
$$+ \int_0^\varphi q r^2 \sin(\varphi - \lambda)\, d\lambda - \tfrac{1}{2} \int_0^\varphi (m r + q r^2) [\sin(\varphi - \lambda)$$
$$+ (\varphi - \lambda)\cos(\varphi - \lambda)]\, d\lambda , \qquad (56)$$

$$\int_0^\varphi M_\varphi \sin(\varphi - \lambda)\, d\lambda = \tfrac{1}{2} (M_{t0} + Q_0 r)(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi) + \tfrac{1}{2} M_{\varphi 0} (\varphi \sin\varphi)$$
$$- \tfrac{1}{2} \int_0^\varphi (m r + q r^2) [\sin(\varphi - \lambda) - (\varphi - \lambda)\cos(\varphi - \lambda)]\, d\lambda , \qquad (57)$$

$$\int_0^\varphi M_\varphi \cos(\varphi - \lambda)\, d\lambda = \tfrac{1}{2} (M_{t0} + Q_0 r)(\varphi \sin\varphi) + \tfrac{1}{2} M_{\varphi 0} (\sin\varphi + \varphi\cos\varphi)$$
$$- \tfrac{1}{2} \int_0^\varphi (m r + q r^2) [(\varphi - \lambda) \sin(\varphi - \lambda)]\, d\lambda , \qquad (58)$$

$$\int_0^{\varphi} M_z \sin(\varphi-\lambda)\,d\lambda = M_{z0}(1-\cos\varphi) + \tfrac{1}{2}\,T_0\,r(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi) + N_0\,r[1-\cos\varphi-\tfrac{1}{2}(\varphi\sin\varphi)] - \int_0^{\varphi}\{\tfrac{1}{2}\,p\,r^2[\sin(\varphi-\lambda)-(\varphi-\lambda)\cos(\varphi-\lambda)] + t\,r^2\big(1-\cos(\varphi-\lambda)-\tfrac{1}{2}[(\varphi-\lambda)\sin(\varphi-\lambda)]\big)\}\,d\lambda\,, \tag{59}$$

$$\int_0^{\varphi} M_z \cos(\varphi-\lambda)\,d\lambda = M_{z0}\sin\varphi + \tfrac{1}{2}\,T_0\,r(\varphi\sin\varphi) + \tfrac{1}{2}\,N_0\,r(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi) - \tfrac{1}{2}\int_0^{\varphi}\{p\,r^2[(\varphi-\lambda)\sin(\varphi-\lambda)] + t\,r^2[\sin(\varphi-\lambda)-(\varphi-\lambda)\cos(\varphi-\lambda)]\}\,d\lambda\,. \tag{60}$$

Schließlich bekommen wir

$$w = w_0 + r\int_0^{\varphi}\psi\,d\lambda \tag{61}$$

oder mit Hilfe von (53) und partieller Integration

$$\begin{aligned}\frac{w}{r} &= \frac{w_0}{r} + \psi_0\sin\varphi - \vartheta_0(1-\cos\varphi) - \gamma\int_0^{\varphi}d\lambda_1\int_0^{\lambda_1}M_t\sin(\lambda_1-\lambda)\,d\lambda \\ &\quad - \beta_2\int_0^{\varphi}d\lambda_1\int_0^{\lambda_1}M_\varphi\cos(\lambda_1-\lambda)\,d\lambda + \beta_1\int_0^{\varphi}d\lambda_1\int_0^{\lambda_1}M_z\cos(\lambda_1-\lambda)\,d\lambda \\ &= \frac{w_0}{r} + \psi_0\sin\varphi - \vartheta_0(1-\cos\varphi) - \gamma\int_0^{\varphi}M_t[1-\cos(\varphi-\lambda)]\,d\lambda \\ &\quad - \beta_2\int_0^{\varphi}M_0\sin(\varphi-\lambda)\,d\lambda + \beta_1\int_0^{\varphi}M_z\sin(\varphi-\lambda)\,d\lambda\,.\end{aligned} \tag{62}$$

Die in (62) auftretenden Integrale lassen sich durch (56), (57), (59) und die Formel

$$\int_0^{\varphi}M_t\,d\lambda = (M_{t0}+Q_0\,r)\sin\varphi - M_{\varphi0}(1-\cos\varphi) - Q_0\,r\,\varphi + \int_0^{\varphi}q\,r^2(\varphi-\lambda)\,d\lambda - \int_0^{\varphi}(m\,r+q\,r^2)\sin(\varphi-\lambda)\,d\lambda \tag{63}$$

ermitteln. Die Gleichungen (35) bis (62) bilden ein vollständiges System von Lösungen der Grundgleichungen (29) bis (32).

Bis jetzt waren die Anfangswerte N_0, T_0, Q_0, M_{t0}, $M_{\varphi0}$, M_{z0} und die Größen (34) (insgesamt zwölf Größen) als von einander unabhängig gegebene Größen angenommen. Wie wir sehen werden, sind die zwölf Größen bei statisch unbestimmten Fällen durch weitere Bedingungen verknüpft.

Die obige Lösung schließt konzentrierte Lasten aus. Im Falle konzentrierter Lasten oder Momente wird man den Ring in Intervalle zerlegen, wobei innerhalb jedes Intervalls die obige Methode verwendbar sein wird mit im allgemeinen verschiedenen Werten der zwölf Integrationskonstanten N_0 bis M_{z0}, u_0 bis w_0, ϑ_0 in jedem Intervall.

6. Spezielle Lastfälle. Wir betrachten eine Reihe von sechs Lastfällen eines offenen Ringstückes vom Mittelpunktswinkel $2\varphi_1$ (Abb. 6), wo äußere Kräfte ausschließlich an den Endflächen des Ringstückes angreifen. Die sechs Fälle finden sich in der Tabelle 1 verzeichnet, und die entsprechenden Werte von $N_0, \ldots M_{z0}$ für den Fall angegeben, daß sich der Winkel φ von der Mitte des Ringstückes gerechnet wird. Alsdann wird die entsprechende Lösung aus (7) bis (12) für $p = q = t = m = 0$ gewonnen. Ferner lassen sich auch die Deformationsgrößen u, v, w, ϑ nach (34) bis (63) integrallos darstellen. Der Fall IV entspricht dem Falle einer zylindrischen Spiralfeder kleiner Steigung mit zentraler Last. Wir werden in den nächsten Abschnitten einige der Lastfälle benutzen, um bestimmte Probleme von praktischer Bedeutung zu lösen.

7. Der geschlossene Ring mit konzentrierten radialen Kräften. Wir beschränken uns auf den Fall gleichmäßig verteilter, gleich großer Kräfte nach Abb. 7. Durch Kombination der

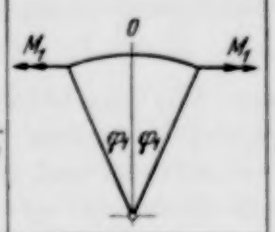
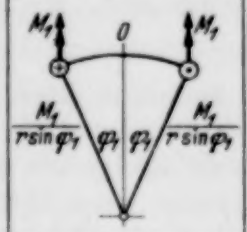
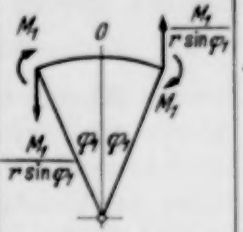
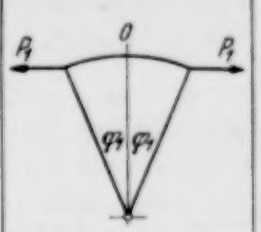
Lastfälle III und VI der Tabelle gewinnt man sofort

$$N_0 = \frac{P}{2\sin\varphi_1}, \quad M_{z0} = M_1 - P\,r\,\frac{1-\cos\varphi_1}{2\sin\varphi_1}, \quad T_0 = Q_0 = M_{t0} = M_{\varphi 0} = 0, \tag{64}$$

worin M_1 den Wert von M_z für $\varphi = \varphi_1$, eine statisch unbestimmte Größe bedeutet. Aus (64) und (7) bis (12), (13), (14) und (29) bis (33′) wird die Spannungsverteilung bis auf die Größe M_1 vollständig bestimmt. Aus (35) bekommen wir

$$v' = v_0' - (\alpha + \beta_3\, r)\,\frac{M_1\, 2\varphi\sin\varphi_1 + P\,r\,(\varphi\cos\varphi_1 - \sin\varphi)}{2\sin\varphi_1} - \alpha\, r\, P\,\frac{\sin\varphi}{2\sin\varphi_1}. \tag{65}$$

Tabelle 1.

Lastfälle	I	II	III	IV	V	VI
						
N_0	0	0	0	0	0	P_1
T_0	0	0	0	0	$\frac{M_1}{r\sin\varphi_1}$	0
Q_0	0	0	0	$\frac{M_1}{r\sin\varphi_1}$	0	0
M_{t0}	M_1	0	0	0	0	0
$M_{\varphi 0}$	0	M_1	0	0	0	0
M_{z0}	0	0	M_1	0	0	$-P_1 r(1-\cos\varphi_1)$

Aus Symmetriegründen gilt $v' = 0$ für $\varphi = 0$ und $\varphi = \varphi_1$, somit $v_0' = 0$ und

$$M_1 = \frac{P\,r}{2}\left[\frac{1}{\varphi_1}\,\frac{\beta_3\, r}{\beta_3\, r + \alpha} - \operatorname{ctg}\varphi_1\right]. \tag{66}$$

Für in bezug auf die Ringebene symmetrischen Querschnitt ($D = 0$) reduziert sich (66) auf eine wohlbekannte Formel.

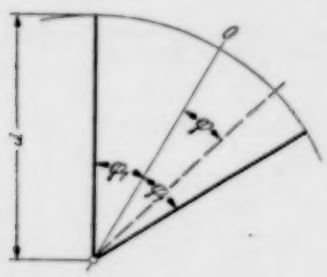
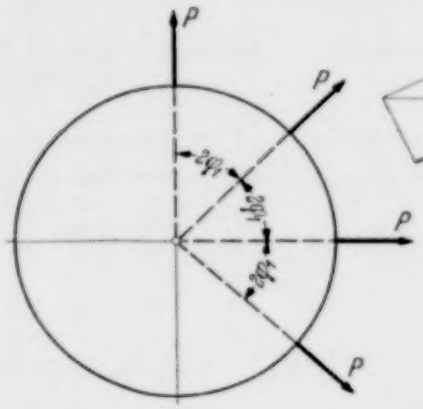


Abb. 6. Koordinatensystem für ein offenes Ringstück vom Mittelpunktswinkel $2\varphi_1$.



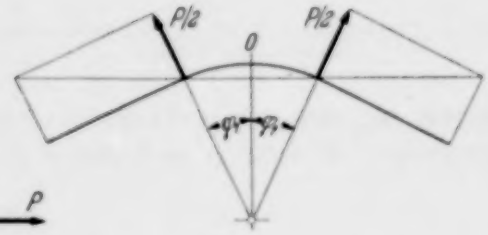


Abb. 7. Geschlossener Kreisring mit konzentrierten radialen Kräften. Ausgeschnittenes Teilstück.

Integriert man (65) zweimal, so bekommt man

$$v = v_0 - (\alpha + \beta_3\, r)\left[\frac{1}{2}\,M_1\,\varphi^2 + r\,P\,\frac{\frac{1}{2}\,(\varphi^2\cos\varphi_1) - 1 + \cos\varphi}{2\sin\varphi_1}\right] - \alpha\, r\, P\,\frac{1-\cos\varphi}{2\sin\varphi_1}, \tag{67}$$

$$u = u_0 - v_0\varphi + (\alpha + \beta_3\, r)\left[\frac{1}{6}\,M_1\,\varphi^3 + r\,P\,\frac{\frac{1}{6}\,\varphi^3\cos\varphi_1 - \varphi + \sin\varphi}{2\sin\varphi_1}\right] - \alpha\, r\, P\,\frac{\varphi - \sin\varphi}{2\sin\varphi_1}. \tag{68}$$

Die Konstanten u_0 und v_0 bestimmen sich aus der Symmetriebedingung $u = 0$ für $\varphi = 0$ und $\varphi = \varphi_1$. Somit bekommen wir $u_0 = 0$ und einen komplizierten Ausdruck für v_0, den wir hier unterdrücken. Weiter ergibt sich aus (53) und (54) mit Hilfe von (55) bis (60)

$$\psi = \psi_0\cos\varphi - \vartheta_0\sin\varphi + \beta_1\left[\left(M_1 - P\,r\,\frac{1-\cos\varphi_1}{2\sin\varphi_1}\right)\sin\varphi + P\,r\,\frac{\sin\varphi - \varphi\cos\varphi}{4\sin\varphi_1}\right], \tag{69}$$

$$\vartheta = \vartheta_0 \cos\varphi + \psi_0 \sin\varphi + \beta_1 \left[\left(M_1 - P r \frac{1-\cos\varphi_1}{2\sin\varphi_1} \right)(1-\cos\varphi) + P r \frac{1-\cos\varphi - \frac{1}{2}\varphi\sin\varphi}{2\sin\varphi_1} \right]. \tag{70}$$

Die Konstanten ψ_0 und ϑ_0 bestimmen sich aus den Bedingungen $\psi = 0$ für $\varphi = 0$ und $\varphi = \varphi_1$, d. h. wir bekommen $\psi_0 = 0$ und einen komplizierten Ausdruck für ϑ_0. Schließlich ergibt sich aus (62)

$$\frac{w}{r} = \frac{w_0}{r} - \vartheta_0(1-\cos\varphi) + \beta_1 \left[\left(M_1 - P r \frac{1-\cos\varphi_1}{2\sin\varphi_1} \right)(1-\cos\varphi) + P r \frac{2(1-\cos\varphi) - \varphi\sin\varphi}{4\sin\varphi_1} \right], \tag{71}$$

und hier wird w_0 aus der Bedingung berechnet, daß $w = 0$ für $\varphi = \varphi_1$ ist. Somit ist der Deformationszustand vollständig bestimmt. Aus der Lösung (64) bis (71) ist zu entnehmen, daß sich die Schwerpunktslinie des Ringes im allgemeinen aus der Ringebene heraus verbiegen wird, auch wenn die äußeren Kräfte selbst auf die Schwerpunktsebene der Ringquerschnitte beschränkt sind.

8. Der geschlossene Ring mit konzentrierten umstülpenden Momenten. Wir beschränken uns auf den Fall gleich großer konzentrierter Momente M, gleichmäßig verteilt mit dem Teilungswinkel $2\varphi_1$. Wir bemerken, daß dies genau dem *Grammel*schen Falle entspricht und zwar für sogenannte schwache Umstülpung. Hier läßt sich eine Lösung durch Kombination der Fälle II und III der Tabelle herstellen. Aus Gleichgewichtsgründen gilt (man vgl. Abb. 8)

$$M_{\varphi 0} = -\frac{M}{2\sin\varphi_1}, \tag{72}$$

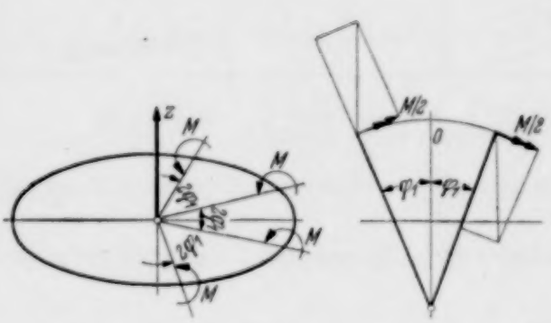


Abb. 8. Geschlossener Kreisring mit konzentrierten umstülpenden Momenten.

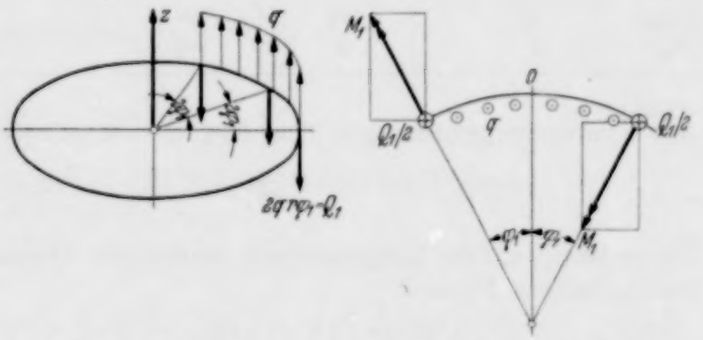


Abb. 9. Geschlossener Kreisring mit gleichmäßig verteilter Last quer zur Ringebene und äquidistanten Stützen.

wogegen M_{z0} statisch unbestimmt bleibt, und im übrigen $N_0 = T_0 = Q_0 = M_{t0} = 0$. Aus der Bedingung $v' = 0$ für $\varphi = 0$ und $\varphi = \varphi_1$ gewinnen wir mit Hilfe von (35)

$$M_{z0} = \frac{\beta_1 r}{\alpha + \beta_3 r} \frac{\sin\varphi_1}{\varphi_1} M_{\varphi 0}. \tag{73}$$

Aus (53) ergibt sich ferner

$$\psi = -\vartheta_0 \sin\varphi + \tfrac{1}{2}\gamma M_{\varphi 0}(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi) - \tfrac{1}{2}\beta_2 M_{\varphi 0}(\sin\varphi + \varphi\cos\varphi) + \beta_1 M_{z0}\sin\varphi. \tag{74}$$

Die Konstante ϑ_0 wird aus der Bedingung $\psi = 0$ für $\varphi = \varphi_1$ bestimmt, so daß

$$\vartheta_0 = \frac{M}{4\sin\varphi_1}\left[\beta_2(1+\varphi_1\operatorname{ctg}\varphi_1) - \gamma(1-\varphi_1\operatorname{ctg}\varphi_1) - \frac{2\beta_1^2 r}{\alpha+\beta_3 r}\frac{\sin\varphi_1}{\varphi_1}\right] \tag{75}$$

wird. Schließlich ergibt sich der Wert ϑ_1 von ϑ für $\varphi = \varphi_1$ zu

$$\vartheta_1 = \frac{M}{4\sin\varphi_1}\left[\beta_2\left(\frac{\varphi_1}{\sin\varphi_1} + \cos\varphi_1\right) + \gamma\left(\frac{\varphi_1}{\sin\varphi_1} - \cos\varphi_1\right) - \frac{2\beta_1^2 r}{\alpha+\beta_3 r}\frac{\sin\varphi_1}{\varphi_1}\right]. \tag{76}$$

Der vollständige Deformationszustand wird wie im vorigen Abschnitte bestimmt aus den Bedingungen $u = 0$ für $\varphi = 0$ und $\varphi = \varphi_1$, $w = 0$ für $\varphi = \varphi_1$. Die Formel (76) ist für den Sonderfall $\beta_1 = 0$ schon von *Grammel* angegeben worden [1].

[1] Technische Dynamik, 2. Auflage, Bd. 1, S. 437, Formel (7). Der Fall $\beta_1 = 0$ wird dort als symmetrieartiger Ring bezeichnet.

9. Der geschlossene Ring mit gleichmäßig verteilter Last quer zur Ringebene und äquidistanten Stützen. Dieser Fall wird durch Abb. 9 illustriert. Er ist im Falle schwach gekrümmter Ringe von *E. Volterra*[1] behandelt worden, wobei ein mit der Durchbiegung $-w$ proportionaler Bettungsdruck q auch berücksichtigt wurde. Wir behandeln hier den Grenzfall stark gekrümmter Ringe unter Beschränkung auf den Fall $q = \text{konst}$. Wir rechnen φ wie früher von der Intervallmitte positiv nach rechts in Abb. 9. Es tritt ein statisch unbestimmtes Biegemoment M_1 über den Stützpunkten auf, hingegen verschwindet dort das Torsionsmoment aus Symmetriegründen. Eine Gleichgewichtsbetrachtung ergibt sofort

$$\left.\begin{aligned} M_{t0} &= q\,r^2\,(\sin\varphi_1 - \varphi_1\cos\varphi_1) - M_1\sin\varphi_1\,, \\ M_{\varphi 0} &= q\,r^2\,(\varphi_1\sin\varphi_1 - 1 + \cos\varphi_1) - M_1\cos\varphi_1\,, \\ Q_0 &= 0\,, \qquad N_0 = T_0 = M_{z0} = 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

wonach sich alle Schnittgrößen wie vorher aus den Formeln (7) bis (12) ergeben. Unbekannt sind noch die Größen u_0, v_0', w_0, ψ_0, ϑ_0 und M_1. Zu ihrer Bestimmung dienen die Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} &\varphi = \varphi_1 : u = 0\,, \quad v' = 0\,, \quad \psi = 0\,, \quad w = 0\,, \\ &\varphi = 0 : u = 0\,, \quad v' = 0\,, \quad \psi = 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

also genau die genügende Anzahl. Die Bedingung $v' = 0$ für $\varphi = 0$ ergibt $v_0' = 0$ und $v' = 0$ für $\varphi = \varphi_1$ also

$$\int_0^{\varphi_1} M_\varphi\, d\lambda = 0\,,$$

woraus sich M_1 berechnen läßt:

$$M_1 = q\,r^2\,(1 - \varphi_1\,\mathrm{ctg}\,\varphi_1)\,. \tag{79}$$

Wir unterdrücken die weitere Ausführung der Deformationsberechnung mit der Bemerkung, daß auch in diesem Falle alle drei Verschiebungsgrößen u, v, w, sowie der Verdrehungswinkel ϑ von Null verschieden sind. Die Spannungsverteilung ergibt sich wie früher durch Einführung der Schnittgrößen in (33′).

(Eingegangen am 29. Juni 1953).

Anschrift des Verfassers: Professor Dr. *F. K. G. Odqvist*, Djursholm 2, Schweden.

[1] *E. Volterra*, Journ. Appl. Mech., Bd. 19, S. 1—4, 1952.

Über spezielle Systeme von Tragflügelgittern I. (Theorie der tragenden Linie.)

Von **K. Nickel.**

1. Einleitung. Während in einer früheren Veröffentlichung[1] Systeme von endlich vielen Tragflügeln untersucht wurden, soll in der vorliegenden und einer noch folgenden Arbeit der Grenzübergang zu unendlich vielen Tragflügeln vollzogen werden. Eine jalousieartige Zusammenstellung von unendlich vielen gleichartigen Tragflügeln mit gleichen Abständen wird seit langem als Tragflügelgitter bezeichnet; die Betrachtung wird im folgenden auf endlich viele solche Tragflügelgitter beschränkt, denen überdies später noch weitere Bedingungen auferlegt werden sollen. Die Behandlungsmethode ist dieselbe wie dort, es wird also von reibungsfreier, inkompressibler und stationärer Potentialströmung ausgegangen und der Strömungsverlauf aus einer Wirbelbelegung der Tragflügel berechnet, wie das in der *Prandtl*schen Theorie der tragenden Linie und der *Birnbaum*schen Theorie der dünnen Profile geschieht. Um den Umfang nicht zu sehr anwachsen zu lassen, werden diese beiden Teile getrennt behandelt; die vorliegende Note bringt die Idealisierung der Flügelgitter als tragende Linien, während über ihre Auffassung als dünne Profile demnächst an derselben Stelle berichtet werden soll. In beiden Fällen werde die Anzahl der betrachteten Flügelgitter mit n bezeichnet.

Im Gegensatz zu Gittern aus Flügelprofilen sind die hier betrachteten Gitter aus Tragflügeln mit endlicher Spannweite und verschwindender Flügeltiefe theoretisch noch kaum behandelt worden, da sie nur bei wenigen Anwendungsgebieten auftreten. Die wichtigste Verwirklichung liegt wohl in den Sonderfällen der waagerechten und senkrechten Gitter vor, die man sich aus Flügeln zwischen parallelen Wänden mit Spalt durch Spiegelung entstanden denken kann. Trotz dieser geringen praktischen Bedeutung mögen die nachfolgenden Untersuchungen der Vollständigkeit halber erlaubt sein, da die verwendeten Untersuchungsmethoden ohne weiteres auch auf den Fall der Profilgitter übertragen werden können, wie demnächst in Teil II gezeigt werden soll.

Wie bei endlich vielen Tragflügeln[1] besteht auch bei Systemen von Flügelgittern die Schwierigkeit, daß die am Ort des Flügels berechneten Abwindgeschwindigkeiten nur für spezielle Gitteranordnungen reell sind, so daß sich gewisse Probleme, wie etwa die „dritte Grundaufgabe" der Tragflügeltheorie, nur für diese besonderen Formen in einfacher Weise lösen lassen. Auf diesen Sachverhalt wird an den entsprechenden Stellen noch besonders hingewiesen werden.

Der Inhalt der nachfolgenden Ausführungen gliedert sich folgendermaßen: Zunächst wird in Ziff. **2** ein einziges Flügelgitter betrachtet ($n = 1$). Da im Gegensatz zu dem vielbearbeiteten Fall eines Einzelflügels hierüber bis heute noch wenig vorliegt, wird diese einfachste Anordnung etwas ausführlicher behandelt. Es werden zunächst Formeln angegeben, nach denen sich Zirkulations- und Abwindverteilung entwickeln lassen und die denen für den Einzelflügel vollständig entsprechen. Weiter ergibt sich eine Umkehrformel für die Zirkulationsverteilung und ein geschlossener Ausdruck für den Gesamtauftrieb eines aus dem Gitterverband herausgegriffenen Flügels. Als Beispiel wird schließlich in zwei Sonderfällen das Gitter mit geringstem induziertem Widerstand durchgerechnet. Systeme von endlich vielen solchen Flügelgittern folgen in Ziff. **3** ($n > 1$); in Ziff. **4** wird aus ihnen der Sonderfall „alternierender" Tragflügelgitter herausgegriffen. Der einfachste Fall eines einzigen solchen Gitters wird in Analogie zu Ziff. **2** ausführlich dargestellt, auch hier läßt sich (bei noch einer zusätzlichen Annahme) eine Umkehrformel angeben. Die etwas umständliche Berechnung eines vorkommenden Integrals ist schließlich im Anhang Ziff. **5** untergebracht.

Läßt man den Abstand zweier Nachbarflügel im Gitterverband immer größer werden, so streben die gefundenen Gesetzmäßigkeiten gegen die entsprechenden im Falle eines Einzelflügels bzw. endlich vieler solcher. Durch diesen Grenzübergang läßt sich somit an jeder Stelle der Rechnung der Zusammenhang mit bereits Bekanntem herstellen. Auf Fragen rein mathe-

[1] *K. Nickel*, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 363.

matischer Natur, wie z. B. die nach der Existenz der vorkommenden Integrale, der Vertauschbarkeit von Integration und Differentiation usw., wird an dieser Stelle nicht eingegangen[1].

2. Der Fall $n = 1$. a) Ein Tragflügel erstrecke sich in Spannweitenrichtung längs der y-Achse von a bis b (Abb. 1). Die örtliche Zirkulation sei $\Gamma(y)$, die von dem Tragflügel am Ort der tragenden Linie hervorgerufene Abwindgeschwindigkeit werde mit $w(y)$ bezeichnet. Unter den Vernachlässigungen der Theorie der tragenden Linie hängen dann nach *L. Prandtl*[2] Abwindgeschwindigkeit und Zirkulation nach folgender Gleichung zusammen:

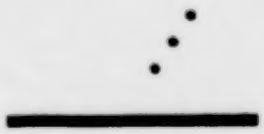
$$w(y) = \frac{1}{4\pi} \oint_a^b \frac{d\Gamma(\eta)}{d\eta} \frac{d\eta}{y-\eta} . \tag{1}$$

Dabei ist an der singulären Stelle $\eta = y$ das Integral als *Cauchy*scher Hauptwert aufzufassen, was durch das Symbol $\oint$ gekennzeichnet werden soll.

Betrachtet man statt des einen Tragflügels der Abb. 1 ein regelmäßiges Tragflügelgitter nach Abb. 2, wobei die einzelnen Tragflügel jeweils um den Vektor $h = h_1 + i\,h_2$ gegeneinander verschoben sind[3], so ist (1) zu ersetzen durch

$$w(y) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \oint_{a+\nu h}^{b+\nu h} \frac{d\Gamma(\eta)}{d\eta} \frac{d\eta}{y-\eta}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \oint_a^b \frac{d\Gamma(\eta+\nu h)}{d\eta} \frac{d\eta}{y-\eta-\nu h} .$$



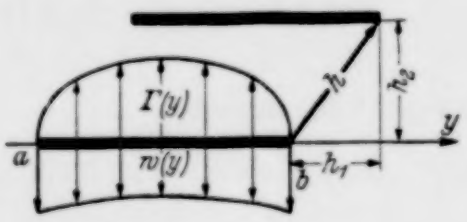


Abb. 2. Tragflügelgitter.

Nun ist aber $\Gamma(\eta+\nu h) = \Gamma(\eta)$, da die Zirkulationen der einzelnen Gitterflügel übereinstimmen, und weiter gilt die Partialbruchzerlegung

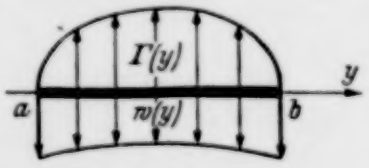


Abb. 1. Einzeltragflügel.

$$\operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-\nu} .$$

Damit findet man also

$$w(y) = \frac{1}{4h} \oint_a^b \frac{d\Gamma(\eta)}{d\eta} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{h} (y-\eta)\, d\eta ,$$

oder mit der Schreibweise[4] $k = \frac{\pi}{h}$

$$w(y) = \frac{k}{4\pi} \oint_a^b \frac{d\Gamma(\eta)}{d\eta} \operatorname{ctg} k(y-\eta)\, d\eta . \tag{2}$$

Für $k \to 0$ geht (2) in die Gleichung (1) über.

b) Um bei bekannter Zirkulation $\Gamma(y)$ den Abwind $w(y)$ in einfacher Weise berechnen zu können, formt man (2) noch durch partielle Integration um in

$$w(y) = \frac{k}{4\pi} \frac{d}{dy} \oint_a^b \Gamma(\eta) \operatorname{ctg} k(y-\eta)\, d\eta . \tag{2a}$$

---

[1] Man vgl. *K. Nickel*, Math. Z. 58 (1953), S. 49.

[2] *L. Prandtl* u. *A. Betz*, Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik. Neudruck aus den Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses zu Heidelberg und aus den Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Göttingen 1927.

[3] Dabei muß für $h_2 = 0$ offenbar die Einschränkung $h = h_1 > b - a$ getroffen werden, wenn sich die Einzelflügel nicht zum Teil überdecken sollen.

[4] Die Einführung der Größe k ist für das folgende zwar nicht notwendig, läßt jedoch die Parallelen zwischen Einzelflügel und Flügelgitter etwas deutlicher hervortreten.

Zerlegt man weiter $w(y)$ und $\Gamma(y)$ in einen symmetrischen und einen antimetrischen Anteil

$$w(y) = w_+(y) + w_-(y) \quad \text{mit} \quad \begin{cases} w_+\left(\frac{a+b}{2}+y\right) = w_+\left(\frac{a+b}{2}-y\right), \\ w_-\left(\frac{a+b}{2}+y\right) = -w_-\left(\frac{a+b}{2}-y\right), \end{cases}$$

$$\Gamma(y) = \Gamma_+(y) + \Gamma_-(y) \quad \text{entsprechend,}$$

so findet man nach einigen Zwischenrechnungen [1] mit der Identität

$$\operatorname{ctg} k(y-\eta) = \frac{\sin k\left(y-\frac{a+b}{2}\right)\cos k\left(y-\frac{a+b}{2}\right) + \sin k\left(\eta-\frac{a+b}{2}\right)\cos k\left(\eta-\frac{a+b}{2}\right)}{\sin^2 k\left(y-\frac{a+b}{2}\right) - \sin^2 k\left(\eta-\frac{a+b}{2}\right)}$$

den Wert

$$w_-(y) = \frac{k}{4\pi}\frac{d}{dy}\oint_a^b \frac{\Gamma_-(\eta)\cos k\left(\eta-\frac{a+b}{2}\right)d\eta}{\sin k\left(y-\frac{a+b}{2}\right) - \sin k\left(\eta-\frac{a+b}{2}\right)} \tag{2b}$$

und

$$w_+(y) = \frac{k}{4\pi}\frac{d}{dy}\left|\cos k\left(y-\frac{a+b}{2}\right)\oint_a^b \frac{\Gamma_+(\eta)\,d\eta}{\sin k\left(y-\frac{a+b}{2}\right) - \sin k\left(\eta-\frac{a+b}{2}\right)}\right|. \tag{2c}$$

Nun gilt [2] für $m = 0,1,\ldots$

$$\frac{1}{\pi}\oint_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\sqrt{\alpha^2-v^2}\,v^m}{u-v}\,dv = -\sum_{\lambda=0}^{\left[\frac{m+1}{2}\right]} q_{2\lambda}\,\alpha^{2\lambda}\,u^{m+1-2\lambda} \tag{3}$$

mit

$$q_0 = -1, \quad q_2 = \frac{1}{2}, \quad q_{2\lambda} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\lambda-3)}{2\cdot 4\cdots 2\lambda} \quad \text{für} \quad \lambda > 1.$$

Setzt man

$$u = \sin k\left(y-\frac{a+b}{2}\right), \qquad v = \sin k\left(\eta-\frac{a+b}{2}\right), \qquad \alpha = \sin k\frac{b-a}{2},$$

so folgt aus (3)

$$\left.\begin{aligned} \frac{k}{\pi}\oint_a^b \frac{\sqrt{\sin k(b-\eta)\sin k(\eta-a)}\,\sin^m k\left(\eta-\frac{a+b}{2}\right)\cos k\left(\eta-\frac{a+b}{2}\right)}{\sin k\left(y-\frac{a+b}{2}\right) - \sin k\left(\eta-\frac{a+b}{2}\right)}\,d\eta = \\ = -\sum_{\lambda=0}^{\left[\frac{m+1}{2}\right]} q_{2\lambda}\sin^{2\lambda} k\frac{b-a}{2}\,\sin^{m+1-2\lambda} k\left(y-\frac{a+b}{2}\right). \end{aligned}\right| \tag{3a}$$

Durch (3a) wird nun folgender Ansatz nahegelegt:

$$\Gamma_-(\eta) = \sqrt{\sin k(b-\eta)\sin k(\eta-a)}\,\sin^{2m+1} k\left(\eta-\frac{a+b}{2}\right), \tag{4a}$$

$$\Gamma_+(\eta) = \sqrt{\sin k(b-\eta)\sin k(\eta-a)}\,\sin^{2m} k\left(\eta-\frac{a+b}{2}\right)\cos k\left(\eta-\frac{a+b}{2}\right), \tag{4b}$$

mit $m = 0,1,\ldots$ Diese Zirkulationsverteilungen ergeben dann nach (3a) die Abwindgeschwindigkeiten

$$w_-(y) = \frac{k}{4}\cos k\left(y-\frac{a+b}{2}\right)\sum_{\lambda=0}^{m} q_{2\lambda}(2\lambda-2m-2)\sin^{2\lambda} k\frac{b-a}{2}\,\sin^{2m+1-2\lambda} k\left(y-\frac{a+b}{2}\right), \tag{5a}$$

[1] Vgl. *J. Dörr*, Ing.-Arch. 19 (1951), S. 66.

[2] Vgl. *A. Betz*, Beiträge zur Tragflügeltheorie, mit besonderer Berücksichtigung des einfachen rechteckigen Flügels, Diss. München 1919.

$$\left.\begin{aligned} w_+(y) = \frac{k}{4}\sum_{\lambda=0}^{m} q_{2\lambda}(2\lambda - 2m - 1)\sin^{2\lambda} k\frac{b-a}{2}\sin^{2m-2\lambda} k\left(y - \frac{a+b}{2}\right) - \\ - \frac{k}{4}\sum_{\lambda=0}^{m} q_{2\lambda}(2\lambda - 2m - 2)\sin^{2\lambda} k\frac{b-a}{2}\sin^{2m+2-2\lambda} k\left(y - \frac{a+b}{2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{5b}$$

Für $k \to 0$ gehen (4a) und (4b) über in den Ansatz von *Prandtl*[1] und *Betz*[2] für den einfachen Tragflügel. Die vorstehenden Formeln lassen sich auch derart umformen, daß die Potenzen von $\sin k\left(y - \frac{a+b}{2}\right)$ durch trigonometrische Funktionen der Vielfachen des Arguments $k\left(y - \frac{a+b}{2}\right)$ ersetzt werden, doch ergibt sich dadurch keine wesentliche Vereinfachung.

Für manche Zwecke günstiger dürfte analog zur *Trefftz*schen[3] Umformung der folgende Weg sein: Man setzt

$$\sin k\left(y - \frac{a+b}{2}\right) = \sin k\frac{b-a}{2}\cos s\,, \qquad \sin k\left(\eta - \frac{a+b}{2}\right) = \sin k\frac{b-a}{2}\cos t \tag{6}$$

und schreibt $w(y) = w(s)$, $\Gamma(\eta) = \Gamma(t)$. Damit gehen (2b) und (2c) über in

$$w_-(s) = -\frac{k}{4\pi\sin k\frac{b-a}{2}}\,\frac{\sqrt{1 - \sin^2 k\frac{b-a}{2}\cos^2 s}}{\sin s}\,\frac{d}{ds}\oint_0^{\pi}\frac{\Gamma_-(t)\sin t\,dt}{\cos s - \cos t} \tag{7a}$$

und

$$w_+(s) = -\frac{k}{4\pi\sin k\frac{b-a}{2}}\,\frac{\sqrt{1-\cdots}}{\sin s}\,\frac{d}{ds}\left\{\sqrt{1-\cdots}\oint_0^{\pi}\frac{\Gamma_+(t)}{\cos s - \cos t}\,\frac{\sin t\,dt}{\sqrt{1 - \sin^2 k\frac{b-a}{2}\cos^2 t}}\right\}. \tag{7b}$$

Wegen der bekannten[4] Formel

$$\frac{1}{\pi}\oint_0^{\pi}\frac{\sin m t\sin t}{\cos s - \cos t}\,dt = \cos m s \qquad (m = 1, 2, \ldots) \tag{8}$$

ist dann folgende Setzung zweckmäßig ($m = 0, 1, \ldots$):

$$\Gamma_-(t) = \sin 2mt \tag{9a}$$

und

$$\Gamma_+(t) = \sqrt{1 - \sin^2 k\frac{b-a}{2}\cos^2 t}\,\sin(2m+1)t\,. \tag{9b}$$

Dazu gehören die Abwindgeschwindigkeiten

$$w_-(s) = \frac{2mk}{4\sin k\frac{b-a}{2}}\sqrt{1 - \sin^2 k\frac{b-a}{2}\cos^2 s}\,\frac{\sin 2ms}{\sin s} \tag{10a}$$

und

$$\left.\begin{aligned} w_+(s) = \frac{(2m+1)k}{4\sin k\frac{b-a}{2}}\left(1 - \sin^2 k\frac{b-a}{2}\cos^2 s\right)\frac{\sin(2m+1)s}{\sin s} - \\ - \frac{k}{4}\sin k\frac{b-a}{2}\cos(2m+1)\cos s\,. \end{aligned}\right\} \tag{10b}$$

Mit den vorstehend abgeleiteten Formeln lassen sich manche aerodynamischen Probleme bei Flügelgittern lösen, insbesondere kann man damit die Verfahren zur Lösung der „zweiten Grundaufgabe" von einem Einzelflügel auf ein Flügelgitter übertragen. In den beiden Sonderfällen des waagrechten und senkrechten Gitters (k reell oder rein imaginär) werden sämtliche

[1] Siehe Fußnote 2 von S. 109.
[2] Siehe Fußnote 2 von S. 110.
[3] *E. Trefftz*, Z. angew. Math. Mech. 1 (1921), S. 206.
[4] Vgl. *K. Nickel*, Math. Z. 53 (1950), S. 28, Formel (14a).

Größen rein reell, nur ersetzen sich im zweiten Fall die trigonometrischen durch die entsprechenden Hyperbelfunktionen. Dabei ist jedoch die richtige Normierung der auftretenden Quadratwurzeln zu beachten, die man z. B. durch den Grenzübergang $k \to 0$ feststellen kann. Für beliebige Gitter (k komplex) ist auch $w(y) = w_1(y) + i\, w_2(y)$ komplex. Darin ist $w_1(y)$ als Abwindgeschwindigkeit zu deuten, der zugehörige Imaginärteil $w_2(y)$ stellt eine dazu senkrechte Geschwindigkeit dar, die in der üblichen Theorie der tragenden Linie vernachlässigt wird.

c) Ist die Abwindgeschwindigkeit $w(y)$ bekannt und die Zirkulation $\Gamma(y)$ gesucht, so stellt (2) eine lineare *Fredholm*sche Integralgleichung erster Art für $d\Gamma(y)/dy$ dar. Ihre Lösung lautet [1]

$$\frac{d\Gamma(\eta)}{d\eta} = \frac{k}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\sin k(b-\eta)\sin k(\eta-a)}} \left[\Gamma \cos k\left(\eta - \frac{a+b}{2}\right) + 4 \oint_a^b \frac{w(y)}{\sin k(y-\eta)} \sqrt{\sin k(b-y)\sin k(y-a)}\, dy \right]. \tag{11}$$

Dabei ist die Gesamtzirkulation Γ eine beliebige Konstante mit der Bedeutung

$$\Gamma = \int_a^b \frac{d\Gamma(y)}{dy}\, dy = \Gamma(b) - \Gamma(a).$$

Da die Zirkulation $\Gamma(y)$ an den Tragflügelenden verschwinden soll, da also $\Gamma(a) = \Gamma(b) = 0$ sein soll, findet man $\Gamma = 0$. Damit ergibt sich durch Integration von (11)

$$\Gamma(\eta) = \frac{4k}{\pi} \int_a^\eta \frac{1}{\sqrt{\sin k(b-t)\sin k(t-a)}} \left(\oint_a^b \frac{w(y)}{\sin k(y-t)} \sqrt{\sin k(b-y)\sin k(y-a)}\, dy \right) dt.$$

Hierin läßt sich die Integrationsreihenfolge vertauschen und das innere Integral geschlossen berechnen. Man findet so als Analogon zur *Betz*schen Umkehrformel

$$\Gamma(\eta) = \frac{4}{\pi} \int_a^b w(y) \times \log \left[\frac{\sin^2 k\frac{b-a}{2} \cos k\left(y - \frac{a+b}{2}\right) \cos k\left(\eta - \frac{a+b}{2}\right) - \cos^2 k\frac{b-a}{2} \sin k\left(y - \frac{a+b}{2}\right) \sin k\left(\eta - \frac{a+b}{2}\right)}{\sin k\frac{b-a}{2} \cos k\frac{b-a}{2} \sin k|y-\eta|} + \frac{\sqrt{\sin k(b-y)\sin k(y-a)\sin k(b-\eta)\sin k(\eta-a)}}{\sin k\frac{b-a}{2} \cos k\frac{b-a}{2} \sin k|y-\eta|} \right] dy. \tag{12}$$

Durch nochmalige Integration ergibt sich der Gesamtauftrieb [2] $A = \int_a^b \Gamma(y)\, dy$ eines Flügels aus dem Gitterverband. Auch hier läßt sich wieder die Integrationsreihenfolge umkehren und das innere Integral durch elementare Funktionen ausdrücken. Da diese Ausrechnung jedoch sehr mühsam ist, soll hier ein anderer Weg beschritten werden. Man faßt dazu A als induzierten Widerstand auf, den die Zirkulationsverteilung $\Gamma(y)$ auf eine zweite Verteilung $\Gamma^*(y)$ ausübt. Dabei sei $\Gamma^*(y)$ so bestimmt, daß die zugehörige Abwindgeschwindigkeit $w^*(y) \equiv 1$ ist. Nach einem bekannten Satz der Tragflügeltheorie [3] ist dann

$$A = \int_a^b \Gamma(y) \cdot 1 \cdot dy = \int_a^b w(y)\, \Gamma^*(y)\, dy\ ^{4}. \tag{13}$$

[1] Siehe Fußnote 1 von S. 109.

[2] Ein konstanter Faktor, Luftdichte und Anblasgeschwindigkeit enthaltend, ist vernachlässigt.

[3] Vgl. die in Fußnote 2 von S. 109 zitierte Arbeit S. 38.

[4] Diese Überlegung ist offenbar nicht auf das betrachtete spezielle Flügelgitter beschränkt, sondern gilt ganz allgemein für beliebige Zusammenstellungen von Tragflügeln. Weiter lassen sich auf dieselbe Weise auch Formeln für Rollmoment, Längsmoment bei Pfeilflügeln usw. gewinnen.

Es bleibt jetzt nur noch $\Gamma^*(y)$ zu bestimmen. Mit der Formel

$$\frac{k}{\pi}\oint_a^b \frac{\sqrt{\sin k(b-y)\sin k(y-a)}}{\sin k(y-\eta)}\,dy = -\sin k\left(\eta-\frac{a+b}{2}\right) \tag{14}$$

folgt aus (11)

$$\frac{d\Gamma^*(y)}{d\eta} = -4\,\frac{\sin k\left(\eta-\frac{a+b}{2}\right)}{\sqrt{\sin k(b-\eta)\sin k(\eta-a)}}$$

und daraus durch Integration

$$\Gamma^*(\eta) = \frac{4}{k}\log\frac{\cos k\left(\eta-\frac{a+b}{2}\right)+\sqrt{\sin k(b-\eta)\sin k(\eta-a)}}{\cos k\frac{b-a}{2}}\,. \tag{15}$$

Setzt man (15) in (13) ein, so kommt schließlich die gesuchte Auftriebsformel

$$A=\int_a^b \Gamma(y)\,dy = \frac{4}{k}\int_a^b w(y)\log\frac{\cos k\left(y-\frac{a+b}{2}\right)+\sqrt{\sin k(b-y)\sin k(y-a)}}{\cos k\frac{b-a}{2}}\,dy\,. \tag{16}$$

Für $w(y)\equiv 1$ läßt sich das Integral auswerten (vgl. Ziff. 5) und wird zu

$$\frac{4}{k}\int_a^b \log\frac{\cos k\left(y-\frac{a+b}{2}\right)+\sqrt{\sin k(b-y)\sin k(y-a)}}{\cos k\frac{b-a}{2}}\,dy = -\frac{4\pi}{k^2}\log\cos k\frac{b-a}{2}\,. \tag{16a}$$

Die vorstehend abgeleiteten Formeln sind zwar allgemein gültig, doch ergibt sich für beliebige komplexe Gitterkonstante k die Schwierigkeit, daß $w(y)$ bei reellem $\Gamma(y)$ komplex wird. Im allgemeinen wird nun von $w(y)=w_1(y)+i\,w_2(y)$ nur der Realteil $w_1(y)$ gegeben sein, während ja $w_2(y)$ für gewöhnlich vernachlässigt wird. Setzt man also $w(y)=w_1(y)$ z. B. in die Formel (12) ein, so ergibt sich eine komplexe Funktion $\Gamma(y)$, während ihrer physikalischen Bedeutung nach die Zirkulation eine reelle Größe ist. Um ein reelles $\Gamma(y)$ zu bekommen, müßte man zu $w_1(y)$ noch eine imaginäre Funktion $i\,w_2(y)$ addieren, deren Bestimmung jedoch auf eine bis heute noch nicht gelöste Integralgleichung führt. Damit lassen sich die Formeln (12), (15) und (16) im allgemeinen nur für reelles oder rein imaginäres k (Gitter waagrecht bzw. senkrecht) benutzen; es sei denn, daß mit $w_1(y)$ auch zufällig $w_2(y)$ bekannt ist.

d) Ist die durch (15) dargestellte Zirkulationsverteilung $\Gamma^*(y)$ reell, so ist sie nach einem Ergebnis von *Munk* [1] gerade diejenige, die bei gegebenem Auftrieb A geringsten induzierten Widerstand [2]

$$W=\int_a^b \Gamma(y)\,w(y)\,dy \tag{17}$$

besitzt. Sie soll für die beiden Grenzfälle des waagerechten und senkrechten Gitters noch etwas näher betrachtet werden:

α) $h\equiv h_1$. Man setzt $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$, also $b-a=1$ und $h_1=1+s$, also $k=\frac{\pi}{h_1}=\frac{\pi}{1+s}$ mit der Spaltbreite s (Abb. 3). Damit findet man aus (15) und (16a) die Zirkulation mit konstanter Abwindgeschwindigkeit und dem Auftrieb A

$$\Gamma^*(\eta) = -\frac{A}{(1+s)\log\cos\frac{\pi}{2(1+s)}}\log\frac{\cos\frac{\pi\eta}{1+s}+\sqrt{\sin\frac{\pi}{2}\frac{1-2\eta}{1+s}\sin\frac{\pi}{2}\frac{1+2\eta}{1+s}}}{\cos\frac{\pi}{2(1+s)}}\,. \tag{18a}$$

[1] *M. Munk*, Isoperimetrische Aufgaben aus der Theorie des Fluges, Diss. Göttingen 1919.
[2] Vgl. Fußnote 2 von S. 112.

Der zugehörige induzierte Widerstand berechnet sich nach (17) und (16a) zu ($W \to W_\infty$ für $s \to \infty$)

$$\frac{W}{W_\infty} = -\frac{\pi^2}{8(1+s)^2 \log\cos\dfrac{\pi}{2(1+s)}}. \tag{19a}$$

Diese Ergebnisse stimmen (bis auf einen Faktor 2 bei Γ^*) überein mit den Formeln, die von *A. Betz*[1] angegeben wurden. In Abb. 3 sind einige Zirkulationsverteilungen nach (18a) eingetragen, für $s \to \infty$ ergibt sich die bekannte elliptische Auftriebsverteilung. Der induzierte Widerstand wird durch die Gitteranordnung verringert und fällt von W_∞ auf Null ab, wenn $s \to 0$ geht (Abb. 3).

β) $h = i\,h_2$. Schreibt man hier $h_2 = s$ und setzt wieder $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$ (vgl. Abb. 4), so lauten die entsprechenden Formeln

$$\Gamma^*(\eta) = \frac{A}{s \log \mathfrak{Cof}\dfrac{\pi}{2s}} \arccos \frac{\mathfrak{Cof}\dfrac{\pi}{s}\eta}{\mathfrak{Cof}\dfrac{\pi}{2s}} \tag{18b}$$

und

$$\frac{W}{W_\infty} = \frac{\pi^2}{8 s^2 \log \mathfrak{Cof}\dfrac{\pi}{2s}}. \tag{19b}$$

Fällt s von großen Werten auf Null ab, so geht die Zirkulationsverteilung wieder von der Halbellipse in eine Rechtecksverteilung über (Abb. 4), nur beginnen merkliche Änderungen diesmal schon erheblich früher als im Falle α). Während dort $\Gamma(y)$ für $s = 0{,}1$ noch recht nahe bei der Halbellipse $s = \infty$ verläuft, ist hier die Zirkulation bei $s = 0{,}1$ schon über einen großen Teil des Flügels praktisch konstant, und der Auftriebsabfall konzentriert sich auf einen kleinen Bereich am Flügelende. Weiter ist jetzt der induzierte Widerstand bei konstantem Auftrieb stets höher als für den Einzelflügel und wächst für $s \to 0$ über alle Grenzen. In Abb. 4 ist daher noch W_∞/W eingetragen. Diese Kurve kann gedeutet werden als induzierter Widerstand des betrachteten Flügelgitters bei festgehaltener Abwindgeschwindigkeit w.

3. Der Fall $n > 1$. a) Betrachtet man n Tragflügel mit derselben Gitterkonstanten k, so ist Gleichung (2) zu ersetzen durch

$$w_\mu(y_\mu) = \frac{k}{4\pi} \sum_{\nu=1}^{n} \oint_{a_\nu}^{b_\nu} \frac{d\Gamma_\nu(\eta_\nu)}{d\eta_\nu} \operatorname{ctg} k(y_\mu - \eta_\nu)\, d\eta_\nu \qquad (\mu = 1, \ldots, n) \tag{20}$$

oder

$$w_\mu(y_\mu) = \frac{k}{4\pi} \frac{d}{dy_\mu} \sum_{\nu=1}^{n} \oint_{a_\nu}^{b_\nu} \Gamma_\nu(\eta_\nu) \operatorname{ctg} k(y_\mu - \eta_\nu)\, d\eta_\nu \qquad (\mu = 1, \ldots, n) \tag{20a}$$

wenn sich ein beliebiger Flügel des ν-ten Gitters von a_ν bis b_ν erstreckt (Abb. 5). Welchen Flügel man dazu herausgreift, ist offenbar gleichgültig.

In diesem allgemeinen Falle ergeben sich wieder für reelles und imaginäres k reelle Abwindgeschwindigkeiten $w_\mu(y_\mu)$, falls alle a_ν und b_ν auf einer Geraden liegen, doch sind dies offenbar nicht die einzigen derartigen Fälle. Z. B. liefern auch bei der nebenstehend skizzierten Anordnung (Abb. 6) alle (reellen) Zirkulationen $\Gamma_\nu(\eta_\nu)$ rein reelle Abwindgeschwindigkeiten $w_\mu(y_\mu)$. Weitere solche Kombinationen lassen sich leicht angeben. Für die nachfolgend abgeleiteten Formeln gelten daher die entsprechenden Überlegungen wie im Falle $n = 1$, nur sind jetzt noch mehr spezielle Gitterformen vorhanden, bei denen die dort genannten Einschränkungen wegfallen.

---

[1] *A. Betz*, Der Energieverlust an spaltförmigen Unterbrechungen von Tragflügeln (maschinenschriftlich).

b) Zur Berechnung der Abwindgeschwindigkeiten $w_\mu(y_\mu)$ setzt man entsprechend zu 2b,

$$\Gamma_\nu(\eta_\nu) = (-1)^\nu \sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n} \sin k(b_\lambda - \eta_\nu) \sin k(a_\lambda - \eta_\nu)} \times \begin{cases} \sum_{\varkappa=0}^{m} \sin^{2\varkappa} k\,\eta_\nu\,[\gamma_{2\varkappa} \cos k\,\eta_\nu + \gamma_{2\varkappa+1} \sin k\,\eta_\nu] & n \text{ ungerade} \\ & (m = 0, 1, \ldots) \\ \gamma_1 + \sum_{\varkappa=1}^{m} \sin^{2\varkappa-1} k\,\eta_\nu\,[\gamma_{2\varkappa} \cos k\,\eta_\nu + \gamma_{2\varkappa+1} \sin k\,\eta_\nu] & n \text{ gerade} \end{cases} \tag{21}$$

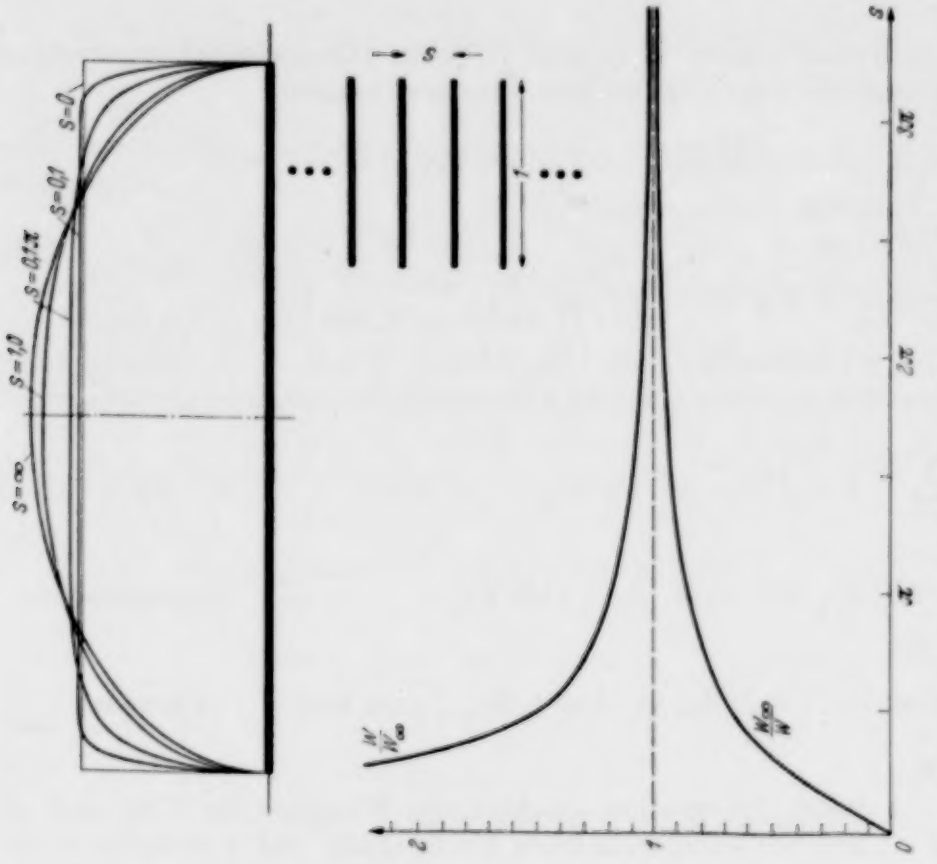


Abb. 4. Senkrechtes Flügelgitter. Auftriebsverteilungen und induzierte Widerstand bei konstanter Abwindgeschwindigkeit.

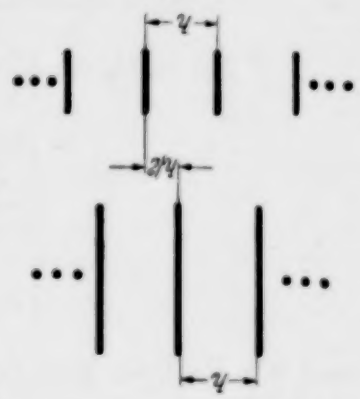


Abb. 6. System aus zwei Tragflügelgittern mit rein reellen Abwindgeschwindigkeiten am Ort der tragenden Linien.

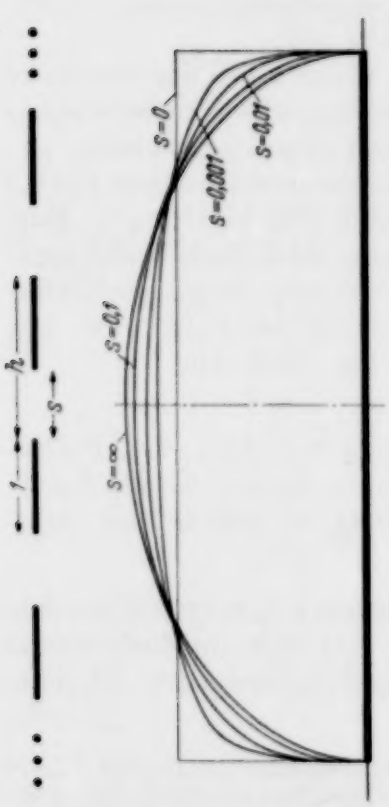
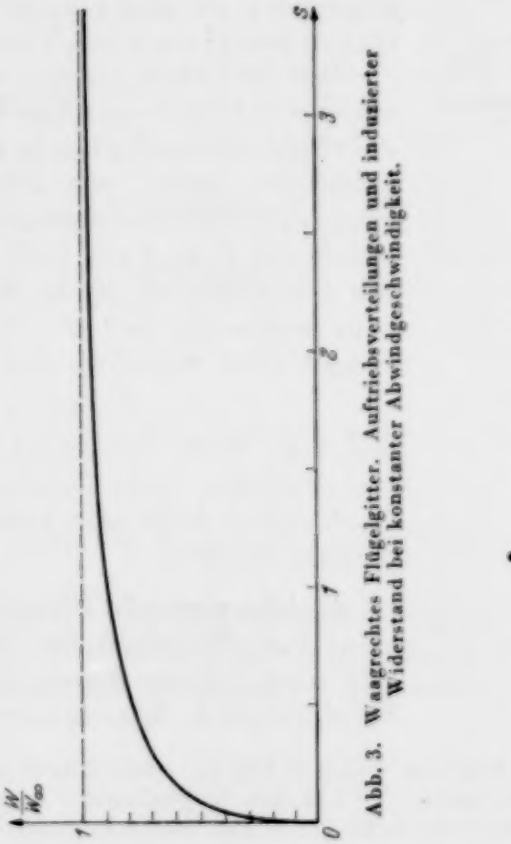


Abb. 3. Waagrechtes Flügelgitter. Auftriebsverteilungen und induzierter Widerstand bei konstanter Abwindgeschwindigkeit.



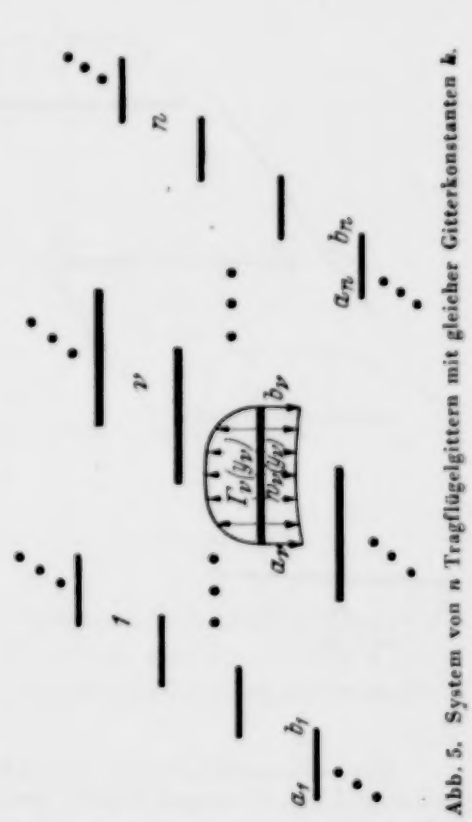


Abb. 5. System von n Tragflügelgittern mit gleicher Gitterkonstanten k.

mit Konstanten $\gamma_\varkappa$, die nicht von der Tragflügelnummer ν abhängen. Mit Formeln entsprechend zu (3a)[1] findet man dann für alle $n = 1,2,\ldots$

$$w_\mu(y_\mu) = A_1 + \sum_{\varkappa=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]+m} \sin^{2\varkappa-1} k\, y_\mu \,(A_{2\varkappa}\cos k\, y_\mu + A_{2\varkappa+1}\sin k\, y_\mu) \tag{22}$$

mit Konstanten $A_\varkappa$, die noch von a_ν, b_ν und k abhängen. Sie lassen sich i. a. nicht durch elementare Funktionen geschlossen ausdrücken.

Die Formeln (21) und (22) entsprechen vollkommen denjenigen bei endlichen Tragflügelsystemen[2]; für der Grenzübergang $k \to 0$ ist nur zu beachten, daß dabei der höchste Koeffizient von (22) verschwindet.

c) Bei bekannten Abwindgeschwindigkeiten $w_\mu(y_\mu)$ ist (20) ein Integralgleichungssystem für $d\Gamma_\nu(\eta_\nu)/d\eta_\nu$. Seine Lösung ist unter sehr allgemeinen Voraussetzungen[3]

$$\frac{d\Gamma_\nu(\eta_\nu)}{d\eta_\nu} = \frac{4k}{\pi}\frac{(-1)^\nu}{\sqrt{-\prod_{\varkappa=1}^{n}\sin k(b_\varkappa-\eta_\nu)\sin k(a_\varkappa-\eta_\nu)}}\left[P_n(\eta_\nu) + \sum_{\mu=1}^{n}(-1)^\mu \oint_{a_\mu}^{b_\mu} w_\mu(y_\mu)\begin{cases}\dfrac{1}{\sin k(y_\mu-\eta_\nu)} & n \text{ ungerade}\\ \operatorname{ctg} k(y_\mu-\eta_\nu) & n \text{ gerade}\end{cases}\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n}\sin k(b_\lambda-y_\mu)\sin k(a_\lambda-y_\mu)}\,dy_\mu\right] \tag{23}$$

mit

$$P_n(\eta) = B_n\cos k\left(\eta - \sum_{\varrho=1}^{n}\frac{a_\varrho+b_\varrho}{2}\right)\sin^{n-1} k\,\eta + \begin{cases}\sum_{\varkappa=0}^{\frac{n-3}{2}}\sin^{2\varkappa} k\,\eta[B_{2\varkappa}\cos k\,\eta + B_{2\varkappa+1}\sin k\,\eta] & (n \text{ ungerade}),\\ B_1 + \sum_{\varkappa=1}^{\frac{n-2}{2}}\sin^{2\varkappa-1} k\,\eta\,[B_{2\varkappa}\cos k\,\eta + B_{2\varkappa+1}\sin k\,\eta] & (n \text{ gerade})\end{cases}$$

und n beliebigen Konstanten $B_\varkappa$.

Während sich im Falle $n = 1$ durch Integration geschlossene Formeln für $\Gamma(y)$ und A angeben ließen, kommt man jetzt bei der entsprechenden Umformung auf hyperelliptische Integrale, die sich i. a. nicht durch elementare Funktionen geschlossen ausdrücken lassen.

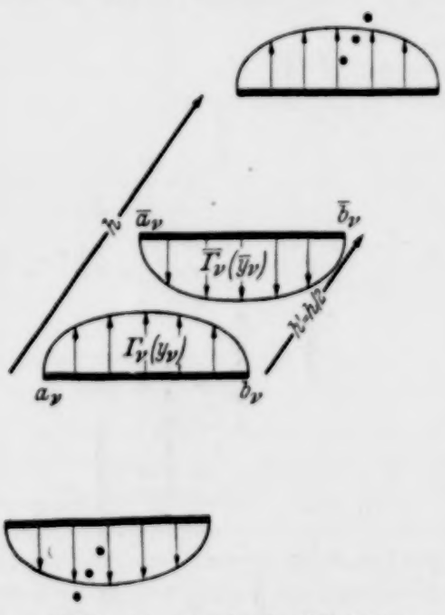


Abb. 7. Alternierendes Tragflügelgitter.

Wie dies bei Systemen von Tragflügeln durchgeführt wurde[4], läßt sich auch hier beweisen, daß es zu beliebigen Abwindgeschwindigkeiten $w_\mu(y_\mu)$ immer genau einen zugehörigen „Satz" von Zirkulationsverteilungen $\Gamma_\nu(\eta_\nu)$ gibt, der das Gleichungssystem (20) befriedigt. Man erhält die $\Gamma_\nu(\eta_\nu)$ aus (23); dabei sind die n unbekannten Koeffizienten $B_\varkappa$ in P_n eindeutig durch die Forderung bestimmt, daß die Zirkulationen $\Gamma_\nu(\eta_\nu)$ an den Flügelenden verschwinden sollen, daß also

$$\Gamma_\nu(a_\nu) = \Gamma_\nu(b_\nu) = 0$$

sein soll. Zum Beweis ist genau wie dort das Nichtverschwinden einer Determinante zu zeigen. Da dieser Nachweis jedoch sehr langwierig ist, soll er hier nicht geführt werden.

4. Alternierende Flügelgitter. a) Ein spezielles System von Flügelgittern, über das sich im einfachsten Fall noch weitere Aussagen machen lassen, erhält man durch folgende Anordnung:

[1] Diese Formeln sind in der in Fußnote 1 von S. 109 zitierten Arbeit angegeben oder lassen sich durch einfache Umformungen daraus gewinnen. [2] Vgl. die in Fußnote 1 von S. 108 zitierte Arbeit, S. 370. [3] Vgl. die in Fußnote 1 von S. 109 zitierte Arbeit. [4] Vgl. die in Fußnote 1 von S. 108 zitierte Arbeit S. 366.

Zu jedem Gitter mit der Zirkulationsverteilung $\Gamma_\nu(y_\nu)$ im Intervall $a_\nu \leq y_\nu \leq b_\nu$ gebe es ein zugehöriges, dessen Bezugsflügel sich von $\bar{a}_\nu = a_\nu - h/2 = a_\nu - \pi/2\,k$ bis $\bar{b}_\nu = b_\nu - h/2 = b_\nu - \pi/2\,k$ erstrecken möge, und das auf dieser Strecke die Zirkulationen $\overline{\Gamma}_\nu(\bar{\eta}_\nu) = -\Gamma_\nu\left(\eta_\nu - \frac{\pi}{2\,k}\right)$ besitzen soll (vgl. Abb. 7). Das zweite Gitter „halbiert" also das erste und ist diesem „entgegengesetzt", die Vereinigung dieser beiden soll als „alternierend" bezeichnet werden.

Damit lautet (20)

$$w_\mu(y_\mu) = \frac{k}{4\pi}\left[\sum_{\nu=1}^{n} \oint_{a_\nu}^{b_\nu} \frac{d\Gamma_\nu(\eta_\nu)}{d\eta_\nu} \operatorname{ctg} k(y_\mu - \eta_\nu)\, d\eta_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} \oint_{\bar{a}_\nu}^{\bar{b}_\nu} \frac{d\overline{\Gamma}_\nu(\bar{\eta}_\nu)}{d\bar{\eta}_\nu} \operatorname{ctg} k(y_\mu - \bar{\eta}_\nu)\, d\bar{\eta}_\nu\right]$$

und, mit $\operatorname{ctg} k(y_\mu - \eta_\nu) - \operatorname{ctg} k(y_\mu - \bar{\eta}_\nu) = \operatorname{ctg} k(y_\mu - \eta_\nu) + \operatorname{tg} k(y_\mu - \eta_\nu) = \frac{2}{\sin 2\,k(y_\mu - \eta_\nu)}$ umgeformt,

$$w_\mu(y_\mu) = \frac{k'}{4\pi}\sum_{\nu=1}^{n} \oint_{a_\nu}^{b_\nu} \frac{d\Gamma_\nu(\eta_\nu)}{d\eta_\nu} \frac{d\eta_\nu}{\sin k'(y_\mu - \eta_\nu)} = \frac{k'}{4\pi}\frac{d}{dy_\mu}\sum_{\nu=1}^{n} \oint_{a_\nu}^{b_\nu} \frac{\Gamma_\nu(\eta_\nu)}{\sin k'(y_\mu - \eta_\nu)}\, d\eta_\nu\,, \tag{24}$$

wenn man $h' = h/2$, also $k' = 2\,k$ setzt (Abb. 7).

b) Durch einen Ansatz entsprechend zu (21) erhält man hier die Beziehungen[1] ($m = 0, 1, \ldots$)

$$\left.\begin{aligned}\Gamma_\nu(\eta_\nu) = (-1)^\nu \sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n} \sin k'(b_\lambda - \eta_\nu) \sin k'(a_\lambda - \eta_\nu)}\ \times \\ \times \begin{cases} \gamma_1 + \sum_{\varkappa=1}^{m} \sin^{2\varkappa-1} k'\eta_\nu\,[\gamma_{2\varkappa}\cos k'\eta_\nu + \gamma_{2\varkappa+1}\sin k'\eta_\nu] & n \text{ ungerade} \\ \sum_{\varkappa=0}^{m} \sin^{2\varkappa} k'\eta_\nu\,[\gamma_{2\varkappa}\cos k'\eta_\nu + \gamma_{2\varkappa+1}\sin k'\eta_\nu] & n \text{ gerade}\end{cases}\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

und

$$w_\mu(y_\mu) = \sum_{\varkappa=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]+m} \sin^{2\varkappa} k'\,y_\mu\,[C_{2\varkappa}\cos k'\,y_\mu + C_{2\varkappa+1}\sin k'\,y_\mu]\,. \tag{26}$$

c) Gleichung (24) hat bei bekannten $w_\mu(y_\mu)$ die Auflösung[2]

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\Gamma_\nu(\eta_\nu)}{d\eta_\nu} = \frac{4k'}{\pi}\frac{(-1)^\nu}{\sqrt{-\prod_{\varkappa=1}^{n}\sin k'(b_\varkappa - \eta_\nu)\sin k'(a_\varkappa - \eta_\nu)}}\Bigg[Q_n(\eta_\nu) + \\ + \sum_{\mu=1}^{n}(-1)^\mu \oint_{a_\mu}^{b_\mu} w_\mu(y_\mu) \begin{cases}\operatorname{ctg} k'(y_\mu - \eta_\nu) & n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{\sin k'(y_\mu - \eta_\nu)} & n \text{ gerade}\end{cases} \sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n}\sin k'(b_\lambda - y_\mu)\sin k'(a_\lambda - y_\mu)}\, dy_\mu\Bigg]\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

mit

$$Q_n(\eta) = \begin{cases} D_1 + \sum_{\varkappa=1}^{\frac{n-1}{2}} \sin^{2\varkappa-1} k'\eta\,[D_{2\varkappa}\cos k'\eta + D_{2\varkappa+1}\sin k'\eta] & (n \text{ ungerade}), \\ \sum_{\varkappa=0}^{\frac{n-2}{2}} \sin^{2\varkappa} k'\eta\,[D_{2\varkappa}\cos k'\eta + D_{2\varkappa+1}\sin k'\eta] & (n \text{ gerade})\end{cases}$$

und n beliebigen Konstanten $D_\varkappa$. Es läßt sich auch hier zeigen, daß man die Abwindgeschwindigkeiten $w_\mu(y_\mu)$ beliebig vorschreiben darf und dann durch (27) und die Forderung $\Gamma_\nu(a_\nu) = \Gamma_\nu(b_\nu) = 0$ eindeutig bestimmte Zirkulationen $\Gamma_\nu(\eta_\nu)$ erhält, die das Gleichungssystem (24) erfüllen.

---

[1] Vgl. Fußnote 1 von S. 116.
[2] Vgl. Fußnote 1 von S. 109.

d) Im einfachsten Falle $n = 1$ kann man noch weitere Ergebnisse erhalten. Gleichung (24) vereinfacht sich dann zu

$$w(y) = \frac{k'}{4\pi} \oint_a^b \frac{d\Gamma(\eta)}{d\eta} \frac{d\eta}{\sin k'(y-\eta)} = \frac{k'}{4\pi} \frac{d}{dy} \oint_a^b \Gamma(\eta) \frac{d\eta}{\sin k'(y-\eta)}, \tag{24a}$$

was man mit der Identität

$$\frac{1}{\sin k'(y-\eta)} = \frac{\sin k'\left(y-\frac{a+b}{2}\right)\cos k'\left(\eta-\frac{a+b}{2}\right) + \sin k'\left(\eta-\frac{a+b}{2}\right)\cos k'\left(y-\frac{a+b}{2}\right)}{\sin^2 k'\left(y-\frac{a+b}{2}\right) - \sin^2 k'\left(\eta-\frac{a+b}{2}\right)}$$

wieder aufspalten kann in

$$w_-(y) = \frac{k'}{4\pi} \frac{d}{dy} \left\{ \cos k'\left(y-\frac{a+b}{2}\right) \oint_a^b \frac{\Gamma_-(\eta)\, d\eta}{\sin k'\left(y-\frac{a+b}{2}\right) - \sin k'\left(\eta-\frac{a+b}{2}\right)} \right\} \tag{24b}$$

und

$$w_+(y) = \frac{k'}{4\pi} \frac{d}{dy} \oint_a^b \Gamma_+(\eta) \frac{\cos k'\left(\eta-\frac{a+b}{2}\right) d\eta}{\sin k'\left(y-\frac{a+b}{2}\right) - \sin k'\left(\eta-\frac{a+b}{2}\right)}. \tag{24c}$$

Setzt man hierin

$$\Gamma_-(\eta) = \sqrt{\sin k'(b-\eta) \sin k'(\eta-a)} \cos k'\left(\eta-\frac{a+b}{2}\right) \sin^{2m+1} k'\left(\eta-\frac{a+b}{2}\right) \tag{28a}$$

und

$$\Gamma_+(\eta) = \sqrt{\sin k'(b-\eta) \sin k'(\eta-a)} \sin^{2m} k'\left(\eta-\frac{a+b}{2}\right), \tag{28b}$$

so ergeben sich durch Rechnungen, die wie in 2 b) verlaufen, die Formeln

$$\left.\begin{aligned} w_-(y) = \frac{k'}{4} \sum_{\lambda=0}^{m} q_{2\lambda} (2\lambda - 2m - 2) \sin^{2\lambda} k' \frac{b-a}{2} \sin^{2m+1-2\lambda} k'\left(q-\frac{a+b}{2}\right) - \\ - \frac{k'}{4} \sum_{\lambda=0}^{m+1} q_{2\lambda} (2\lambda - 2m - 3) \sin^{2\lambda} k' \frac{b-a}{2} \sin^{2m+3-2\lambda} k'\left(y-\frac{a+b}{2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{29a}$$

und

$$w_+(y) = \frac{k'}{4} \cos k'\left(y-\frac{a+b}{2}\right) \sum_{\lambda=0}^{m} q_{2\lambda} (2\lambda - 2m - 1) \sin^{2\lambda} k' \frac{b-a}{2} \sin^{2m-2\lambda} k'\left(y-\frac{a+b}{2}\right). \tag{29b}$$

Die *Trefftz*sche Umformung (6) bringt

$$w_-(s) = -\frac{k'}{4\pi \sin k' \frac{b-a}{2}} \frac{\sqrt{1-\cdots}}{\sin s} \frac{d}{ds} \left\{ \sqrt{1-\cdots} \oint_0^\pi \frac{\Gamma_-(t) \sin t}{\cos s - \cos t} \frac{dt}{\sqrt{1-\sin^2 k' \frac{b-a}{2} \cos^2 t}} \right\} \tag{24d}$$

und

$$w_+(s) = -\frac{k'}{4\pi \sin k' \frac{b-a}{2}} \frac{\sqrt{1-\sin^2 k' \frac{b-a}{2} \cos^2 s}}{\sin s} \frac{d}{ds} \oint_0^\pi \frac{\Gamma_+(t) \sin t}{\cos s - \cos t}\, dt. \tag{24e}$$

Damit entsprechen sich die folgenden Zirkulationen ($m = 0, 1, \ldots$):

$$\Gamma_-(t) = \sqrt{1 - \sin^2 k' \frac{b-a}{2} \cos^2 t}\, \sin 2mt \tag{30a}$$

$$\Gamma_+(t) = \sin (2m+1)t \tag{30b}$$

und die Abwindgeschwindigkeiten

$$w_-(s) = \frac{2\,m\,k'}{4\sin k'\frac{b-a}{2}}\left(1-\sin^2 k'\frac{b-a}{2}\cos^2 s\right)\frac{\sin 2\,m\,s}{\sin s} - \\ -\frac{k'}{4}\sin k'\frac{b-a}{2}\cos 2\,m\,s\cos s \qquad (31a)$$

$$w_+(s) = \frac{(2\,m+1)\,k'}{4\sin k'\frac{b-a}{2}}\sqrt{1-\sin^2 k'\frac{b-a}{2}\cos^2 s}\;\frac{\sin(2\,m+1)\,s}{\sin s}. \qquad (31b)$$

Die Auflösung von (24a) bei bekanntem $w(y)$ lautet [1]

$$\frac{d\Gamma(\eta)}{d\eta} = \frac{k'}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\sin k'(b-\eta)\sin k'(\eta-a)}}\left[k'\int_a^b \Gamma(y)\sin k'\left(y-\frac{a+b}{2}\right)dy + \right. \\ \left. + 4\oint_a^b w(y)\operatorname{ctg} k'(y-\eta)\sqrt{\sin k'(b-y)\sin k'(y-a)}\;dy\right]. \qquad (27a)$$

Ist $\Gamma(y)$ symmetrisch zu $\frac{a+b}{2}$, also $\Gamma(y)=\Gamma_+(y)$ mit $\Gamma_+\left(\frac{a+b}{2}+y\right)=\Gamma_+\left(\frac{a+b}{2}-y\right)$, so verschwindet $\int_a^b \Gamma_+(y)\sin k'\left(y-\frac{a+b}{2}\right)dy$. In diesem Falle läßt sich (27a) noch einmal integrieren und gibt

$$\Gamma_+(\eta) = \frac{4}{\pi}\int_a^b w_+(y)\log\left[\frac{\sin^2 k'\frac{b-a}{2}-\sin k'\left(y-\frac{a+b}{2}\right)\sin k'\left(\eta-\frac{a+b}{2}\right)}{2\sin k'\frac{b-a}{2}\cos\frac{k'}{2}(y+\eta-a-b)\sin\frac{k'}{2}|y-\eta|} + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{\sin k'(b-y)\sin k'(y-a)\sin k'(b-\eta)\sin k'(\eta-a)}}{2\sin k'\frac{b-a}{2}\cos\frac{k'}{2}(y+\eta-a-b)\sin\frac{k'}{2}|y-\eta|}\right]dy. \qquad (32)$$

Für $k'\to 0$ geht (32) wieder in die *Betz*sche Umkehrformel über.

Ist $\Gamma(y)$ unsymmetrisch zu $\frac{a+b}{2}$, so addiert sich zu (32) noch ein elliptisches Integral. Eine Formel für den Auftrieb, entsprechend (16) beim einfachen Gitter, läßt sich hier nicht mit elementaren Funktionen angeben, da die Berechnung der Auftriebsverteilung $\Gamma^*(y)$ mit $w^*(y)\equiv 1$ ebenfalls auf elliptische Integrale führt.

Wie in Ziff. 2 sind auch hier die Fälle des waagerechten und des senkrechten Gitters die einzigen, in denen $w(y)$ bei reellem $\Gamma(y)$ reell wird.

5. Anhang. Zur Berechnung des Integrals (16a)

$$I = \frac{4}{k}\int_a^b \log\frac{\cos k\left(y-\frac{a+b}{2}\right)+\sqrt{\sin k(b-y)\sin k(y-a)}}{\cos k\frac{b-a}{2}}\,dy = 4\int_a^b \frac{y\sin k\left(y-\frac{a+b}{2}\right)}{\sqrt{\sin k(b-y)\sin k(y-a)}}\,dy$$

$$= \frac{2}{k}\int_a^b \log\frac{\cos k\left(y-\frac{a+b}{2}\right)+\sqrt{\sin k(b-y)\sin k(y-a)}}{\cos k\left(y-\frac{a+b}{2}\right)-\sqrt{\sin k(b-y)\sin k(y-a)}}\,dy$$

betrachtet man, wie es ähnlich schon *A. Betz* [2] getan hat, den allgemeineren Ausdruck

$$I(\varepsilon) = \frac{2}{k}\int_a^b \log\frac{\varepsilon\cos k\left(y-\frac{a+b}{2}\right)+\sqrt{\sin k(b-y)\sin k(y-a)}}{\varepsilon\cos k\left(y-\frac{a+b}{2}\right)-\sqrt{\sin k(b-y)\sin k(y-a)}}\,dy$$

[1] Vgl. Fußnote 1 von S. 109.
[2] Vgl. Fußnote 1 von S. 114.

mit $\varepsilon > 1$, aus dem man rückwärts $I = \lim_{\varepsilon \to 1} I(\varepsilon)$ gewinnen kann. Durch Differentiation nach ε unter dem Integralzeichen findet man

$$\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon} = -\frac{4}{k} \int_a^b \frac{\sqrt{\sin^2 k\frac{b-a}{2} - \sin^2 k\left(y - \frac{a+b}{2}\right)}\cos k\left(y - \frac{a+b}{2}\right)}{(1-\varepsilon^2)\sin^2 k\left(y - \frac{a+b}{2}\right) - \sin^2 k\frac{b-a}{2} + \varepsilon^2}\, dy,$$

und dieses Integral läßt sich leicht ausrechnen, wenn man $\sin k\left(y - \frac{a+b}{2}\right)$ als neue Integrationsveränderliche einführt. Man findet dann mit $\alpha = \sin k\frac{b-a}{2}$

$$\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{4\pi}{k^2(1-\varepsilon^2)}\left[1 - \varepsilon\sqrt{\frac{1-\alpha^2}{\varepsilon^2-\alpha^2}}\right].$$

Wie man durch Ableiten bestätigt, gehört dazu das Integral

$$I(\varepsilon) = \frac{4\pi}{k^2}\log\frac{1+\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2-\alpha^2} + \sqrt{1-\alpha^2}} + C.$$

Läßt man $\varepsilon \to \infty$ gehen, so ergibt sich $C = 0$. Also gilt schließlich

$$I = \lim_{\varepsilon \to 1} I(\varepsilon) = \frac{4\pi}{k^2}\lim_{\varepsilon \to 1}\log\frac{1+\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2-\alpha^2} + \sqrt{1-\alpha^2}} = \frac{4\pi}{k^2}\log\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} = -\frac{4\pi}{k^2}\log\cos k\,\frac{b-a}{2}.$$

(Eingegangen am 6. Juli 1953.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Karl Nickel*, Instituto Aerotecnico, Córdoba, Argentinien.

Einige Anwendungen eines nichtlinearen Elastizitätsgesetzes*.

Von F. Jindra.

1. Einleitung. Die klassische Elastizitätstheorie stützt sich durchaus auf die Gültigkeit des *Hooke*schen Gesetzes, das einen linearen Zusammenhang zwischen den Spannungen und Verzerrungen annimmt. Dabei dürfen die Verzerrungen als unendlich klein behandelt werden. Viele Werkstoffe zeigen aber schon bei diesen kleinen Verzerrungen ein nichtlineares Verhalten, so daß das Bedürfnis nach einem nichtlinearen Gesetz bestand. *H. Kauderer*[1] hat daher ein allgemeines nichtlineares Elastizitätsgesetz für kleine Verzerrungen angegeben, das sämtliche elastischen Probleme umfaßt und die klassische Theorie als Grenzfall enthält.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit den Anwendungen dieses nichtlinearen Elastizitätsgesetzes auf einige elastomechanische Probleme. In einem einleitenden Abschnitt (Ziff. 2) werden die Grundgleichungen der nichtlinearen Elastizitätstheorie der kleinen Verzerrungen zusammengestellt. Im weiteren verweisen wir dabei auf die Arbeit von *H. Kauderer*. Wir behandeln zuerst den ebenen Spannungszustand durch Einführung der *Airy*schen Spannungsfunktion, wobei wir einige einfache exakte Lösungen angeben und dann die Biegung des Rechteckstreifens durch eine Einzelkraft mit der Methode der Störungsrechnung behandeln (Ziff. 3). Im Anschluß daran stellen wir die Differentialgleichung der *Airy*schen Spannungsfunktion in Polarkoordinaten auf, teilen einige exakte Lösungen mit und behandeln durch Reihenentwicklungen als weitere Beispiele die Kreisringscheibe unter Außendruck und den ebenen Keil mit einem Moment an der Spitze (Ziff. 4). Sodann folgen die rotierenden Scheiben, wobei wir zuerst die allgemeinen Gleichungen für die Spannungen herleiten und dann die Scheibe gleicher Festigkeit exakt, die Scheibe gleicher Dicke aber wieder mit Reihenentwicklungen untersuchen (Ziff. 5). Schließlich stellen wir noch die Grundgleichungen der Torsion des Umdrehungskörpers auf und behandeln mit der Methode des Minimums der Fehlerquadrate als Beispiel den Kreiskegel (Ziff. 6).

2. Das nichtlineare Elastizitätsgesetz für kleine Verzerrungen. In kartesischen Koordinaten x, y, z ist der Spannungszustand vollständig durch die drei Normalspannungen σ_x, σ_y, σ_z und die drei Schubspannungen τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx} gegeben. Sind X, Y, Z die Komponenten der auf die Volumeinheit wirkenden Kräfte, so gelten die Gleichgewichtsbedingungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0\,, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0\,, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

Unter Beschränkung auf unendlich kleine Verzerrungen, d. h. Verzerrungen, bei denen Größen von der zweiten Ordnung in den Verschiebungskomponenten u, v, w und deren Ableitungen gegenüber den linearen Größen vernachlässigt werden können, wird der Verzerrungszustand durch die drei Dehnungen

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}\,, \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \tag{2.2}$$

und die drei Winkeländerungen

$$\psi_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\,, \qquad \psi_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\,, \qquad \psi_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \tag{2.3}$$

beschrieben. Das Elastizitätsgesetz gibt den Zusammenhang zwischen dem Spannungs- und dem Verzerrungszustand. Die Spannungs-Dehnungsbeziehungen des nichtlinearen Elastizitäts-

* Auszug aus der Stuttgarter Dissertation (Berichter: Prof. *Grammel*, Mitberichter: Prof. *Siebel*).
[1] *H. Kauderer*, Ing.-Arch. 17 (1949) S. 450.

gesetzes für kleine Verzerrungen lauten in der allgemeinen Form

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 3K\,\varkappa(\varepsilon_0)\,\varepsilon_0 + 2G\,\gamma(\psi_0^2)\,(\varepsilon_x - \varepsilon_0)\,, \\ \sigma_y &= 3K\,\varkappa(\varepsilon_0)\,\varepsilon_0 + 2G\,\gamma(\psi_0^2)\,(\varepsilon_y - \varepsilon_0)\,, \\ \sigma_z &= 3K\,\varkappa(\varepsilon_0)\,\varepsilon_0 + 2G\,\gamma(\psi_0^2)\,(\varepsilon_z - \varepsilon_0)\,, \\ \tau_{xy} &= G\,\gamma(\psi_0^2)\,\psi_{xy}\,, \quad \tau_{yz} = G\,\gamma(\psi_0^2)\,\psi_{yz}\,, \quad \tau_{zx} = G\,\gamma(\psi_0^2)\,\psi_{zx}\,. \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

Dabei bedeuten K und G den Kompressionsmodul und den Schubmodul beim *Hooke*schen Gesetz, ε_0 und ψ_0^2 die Dehnungsgrößen

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\,, \\ \psi_0^2 &= \frac{2}{3}\{2[(\varepsilon_x - \varepsilon_0)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_0)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_0)^2] + \psi_{xy}^2 + \psi_{yz}^2 + \psi_{zx}^2\}\,, \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

welche die Invarianten der Tensoren der Volumdehnung und der Gehaltsänderung darstellen. Die Dehnungsfunktion $\varkappa(\varepsilon_0)$ und die Scherungsfunktion $\gamma(\psi_0^2)$ werden als Potenzreihen der Dehnungsgrößen (2.5) angesetzt:

$$\left.\begin{aligned} \varkappa(\varepsilon_0) &= 1 + \varkappa_1\,\varepsilon_0 + \varkappa_2\,\varepsilon_0^2 + \varkappa_3\,\varepsilon_0^3 + \cdots\,, \\ \gamma(\psi_0^2) &= 1 + \gamma_2\,\psi_0^2 + \gamma_4\,\psi_0^4 + \gamma_6\,\psi_0^6 + \cdots\,. \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

Die Gleichungen (2.4) lassen sich umkehren. Man erhält

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{3K}\,k(s_0)\,\sigma_0 + \frac{1}{2G}\,g(t_0^2)\,(\sigma_x - \sigma_0)\,, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{3K}\,k(s_0)\,\sigma_0 + \frac{1}{2G}\,g(t_0^2)\,(\sigma_y - \sigma_0)\,, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{3K}\,k(s_0)\,\sigma_0 + \frac{1}{2G}\,g(t_0^2)\,(\sigma_z - \sigma_0)\,, \\ \psi_{xy} &= \frac{1}{G}\,g(t_0^2)\,\tau_{xy}\,, \quad \psi_{yz} = \frac{1}{G}\,g(t_0^2)\,\tau_{yz}\,, \quad \psi_{zx} = \frac{1}{G}\,g(t_0^2)\,\tau_{zx}\,, \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

wo die dimensionslosen Spannungsgrößen s_0 und t_0 durch die invarianten Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} s_0 &= \frac{\sigma_0}{3K}\,, \quad \sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\,, \\ t_0 &= \frac{\tau_0}{G}\,, \quad \tau_0^2 = \frac{2}{3}\left\{\frac{1}{2}[(\sigma_x - \sigma_0)^2 + (\sigma_y - \sigma_0)^2 + (\sigma_z - \sigma_0)^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right\} \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

gegeben sind. Die Kompressionsfunktion $k(s_0)$ und die Schubfunktion $g(t_0^2)$ nehmen als Potenzreihen der Spannungsgrößen (2.8) die Gestalt an

$$\left.\begin{aligned} k(s_0) &= 1 + k_1\,s_0 + k_2\,s_0^2 + k_3\,s_0^3 + \cdots\,, \\ g(t_0^2) &= 1 + g_2\,t_0^2 + g_4\,t_0^4 + g_6\,t_0^6 + \cdots\,. \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

Mit Hilfe der drei Gleichgewichtsbedingungen (2.1), der sechs Verzerrungsgrößen (2.2), (2.3) und der sechs Spannungs-Dehnungsbeziehungen (2.4) oder (2.7) ist es möglich, die inneren Kräfte und die Formänderungen eines dem nichtlinearen Elastizitätsgesetz gehorchenden, in bestimmter Weise belasteten und gestützten Körpers zu berechnen. Die Aufgabe der Ermittlung des wahren Spannungsverlaufs bei willkürlich vorgegebenen Kompressions- und Schubfunktionen $k(s_0)$ und $g(t_0^2)$ bringt unüberwindliche mathematische Schwierigkeiten mit sich. Man vereinfacht die Aufgabe, indem man sich auf bestimmte, einfache Formen dieser Funktionen beschränkt. Es wird dann angenommen, daß die Funktionen $k(s_0)$ und $g(t_0^2)$ in der Form

$$k(s_0) \equiv 1, \quad g(t_0^2) \equiv 1 + g_2\,t_0^2 \tag{2.10}$$

darstellbar sind und $g(t_0^2)$ nur wenig vom Wert Eins abweicht. Diese Annahme kann bei vielen Stoffen als erfüllt angesehen werden [1].

3. Der ebene Spannungszustand in kartesischen Koordinaten. Wir behandeln einen plattenförmigen Körper, bei dem die überall gleiche Dicke gegen die Abmessungen der Grundfläche gering ist. Die Scheibe wird nur an ihrem Rand durch Kräfte belastet, die in der Ebene der

[1] Vgl. *H. Kauderer*, a. a. O. S. 468.

Scheibe wirken und über die Dicke der Scheibe gleichmäßig verteilt sind. Wir sprechen dann von einem ebenen Spannungszustand [1].

Wir legen ein rechtwinkliges (x, y)-Koordinatensystem in die Mittelebene der Scheibe. Für den ebenen Spannungszustand gilt also

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 . \tag{3.1}$$

Bei fehlenden Volumkräften ($X = Y = Z = 0$) und mit (3.1) erhalten wir aus (2.1) die Gleichgewichtsbedingungen des ebenen Spannungszustandes

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 , \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 . \tag{3.2}$$

Wegen $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ sind auch die Winkeländerungen $\psi_{yz} = \psi_{zx} = 0$. Die Verzerrungsgrößen (2.2) und (2.3) reduzieren sich dann auf

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} , \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} , \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} , \qquad \psi_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} , \tag{3.3}$$

und von den Spannungs-Dehnungsgleichungen (2.7) bleiben die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{3K} k(s_0)\, \sigma_0 + \frac{1}{2G} g(t_0^2)\, (\sigma_x - \sigma_0) , \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{3K} k(s_0)\, \sigma_0 + \frac{1}{2G} g(t_0^2)\, (\sigma_y - \sigma_0) , \\ \psi_{xy} &= \frac{1}{G} g(t_0^2)\, \tau_{xy} \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

mit den Abkürzungen

$$s_0 = \frac{1}{9K} (\sigma_x + \sigma_y) , \qquad t_0^2 = \frac{2}{9G^2} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\, \tau_{xy}^2) \tag{3.5}$$

bestehen. Aus (3.3) leiten wir die Verträglichkeitsbedingung des Verzerrungszustandes

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi_{xy}}{\partial x\, \partial y} \tag{3.6}$$

ab. In diese Gleichung führen wir die Ausdrücke (3.4) für die Verzerrungskomponenten ein und erhalten

$$\Delta \left\{ \left[\frac{1}{3K} k(s_0) - \frac{1}{2G}\, g(t_0^2) \right] \sigma_0 \right\} + \frac{1}{2G} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [g(t_0^2)\, \sigma_x] + \frac{1}{2G} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [g(t_0^2)\, \sigma_y] = \frac{1}{G} \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} [g(t_0^2)\, \tau_{xy}] ,$$

wo $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ den *Laplace*schen Operator bedeutet. Die rechte Seite der Gleichung läßt sich mit Hilfe von (3.2) umschreiben. Es ergibt sich

$$\Delta \left\{ \left[\frac{1}{9K} k(s_0) + \frac{1}{3G}\, g(t_0^2) \right] (\sigma_x + \sigma_y) \right\} - \frac{1}{2G} \left[\sigma_x \frac{\partial^2 g(t_0^2)}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 g(t_0^2)}{\partial y^2} + 2\, \tau_{xy} \frac{\partial^2 g(t_0^2)}{\partial x\, \partial y} \right] = 0 . \tag{3.7}$$

Da die Gleichungen (3.2) in ihrer Form mit den Gleichungen der linearen Theorie übereinstimmen, so können die Spannungen auch hier aus einer einzigen Funktion $F(x, y)$, der sog. *Airy*schen Spannungsfunktion hergeleitet werden, welche mit den Spannungskomponenten folgendermaßen zusammenhängt

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} , \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} , \qquad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} . \tag{3.8}$$

Mit diesem Ansatz werden die beiden Gleichungen (3.2) identisch befriedigt, während (3.7) übergeht in

$$\Delta \left\{ \left[\frac{1}{9K} k(s_0) + \frac{1}{3G}\, g(t_0^2) \right] \Delta F \right\} - \frac{1}{2G} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 g(t_0^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 g(t_0^2)}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} \frac{\partial^2 g(t_0^2)}{\partial x\, \partial y} \right] = 0 \tag{3.9}$$

mit

$$s_0 = \frac{1}{9K} \Delta F , \qquad t_0^2 = \frac{2}{9G^2} \left[(\Delta F)^2 + 3 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} \right)^2 - 3 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right] . \tag{3.10}$$

Dies ist eine quasilineare partielle Differentialgleichung vierter Ordnung, und die allgemeinste

[1] Siehe z. B. *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*, Technische Dynamik, 2. Aufl., Bd. I, S. 111, Berlin 1953.

Aufgabe des ebenen Spannungszustandes läuft auf die Lösung dieser Gleichung bei vorgegebenen Randbedingungen hinaus.

a) Einfache Lösungen für die Rechteckscheibe. Wir betrachten zuerst einige einfache Spannungszustände, die eine exakte Lösung der Differentialgleichung (3.9) zulassen.

Der in Abb. 1 dargestellte rechteckige Streifen von beliebiger Länge und gleicher Dicke, die gleich Eins gesetzt ist, wird längs der Querseiten durch gleichmäßig verteilte Lasten p auf Zug beansprucht. Die zugehörige Spannungsfunktion

$$F = \frac{p}{2} y^2 \tag{3.11}$$

liefert nach (3.8) die Spannungskomponenten

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = p\,, \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0\,, \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = 0 \tag{3.12}$$

und nach (3.10)

$$s_0 = \frac{1}{9K} p\,, \qquad t_0^2 = \frac{2}{9G^2} p^2\,. \tag{3.13}$$

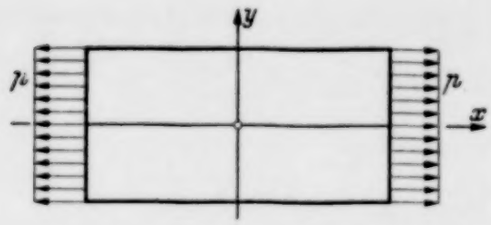


Abb. 1. Rechteckscheibe unter Zug.

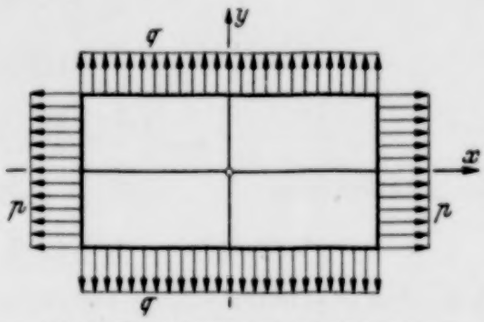


Abb. 2. Überlagerung zweier Zugbelastungen.

Wie man leicht sieht, erfüllt (3.11) mit (3.13) sowohl die Differentialgleichung (3.9) als auch die Randbedingungen.

Durch Überlagerung zweier einachsiger Spannungszustände in zwei zueinander senkrechten Richtungen erhält man

Abb. 3. Rechteckscheibe unter Schub.

$$F = \frac{1}{2}(p\,y^2 + q\,x^2)\,, \tag{3.14}$$

woraus

$$\sigma_x = p\,, \qquad \sigma_y = q\,, \qquad \tau_{xy} = 0 \tag{3.15}$$

und

$$s_0 = \frac{1}{9K}(p+q)\,, \qquad t_0^2 = \frac{2}{9G^2}(p^2 + q^2 - p\,q) \tag{3.16}$$

folgt. Die Funktion (3.14) mit (3.16) genügt somit der Gleichung (3.9), die Randbelastung der Scheibe ist in Abb. 2 dargestellt.

Zu der Spannungsfunktion

$$F = r\,x\,y \tag{3.17}$$

gehört ein besonders einfacher Spannungszustand. Mit Hilfe von (3.8) berechnet man die Spannungskomponenten

$$\sigma_x = 0, \qquad \sigma_y = 0, \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = -r \tag{3.18}$$

und

$$s_0 = 0\,, \qquad t_0^2 = \frac{2}{3G^2} r^2; \tag{3.19}$$

es entspricht ihr der durch Abb. 3 wiedergegebene Zustand der reinen Schubbeanspruchung einer Rechteckscheibe.

Auch die Überlagerung einer Schubbelastung mit einer gleichmäßigen Zug- oder Druckbeanspruchung läßt sich einfach behandeln.

b) Die Biegung des Rechteckstreifens durch eine Einzellast. Als weitere Anwendung der Methode der *Airy*schen Spannungsfunktion behandeln wir die Biegung des Balkens als ein ebenes Problem. Wir beschränken uns hier auf den Sonderfall, daß die Kompressions- und Schubfunktion in der Form (2.10) darstellbar sind. Mit dieser Annahme wird aus (3.9)

$$\Delta\left[\left(\frac{1}{9K}+\frac{1}{3G}+\frac{1}{3G}\,g_2\,t_0^2\right)\Delta F\right]-\frac{g_2}{2G}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 t_0^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 t_0^2}{\partial y^2}-2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 t_0^2}{\partial x\,\partial y}\right)=0\,.$$

Nach Division mit $\left(\frac{1}{9K}+\frac{1}{3G}\right)$ und nach Ausführung der Differentiationen entsteht

$$\left.\begin{aligned}
&F_{xxxx}+2\,F_{xxyy}+F_{yyyy}\\
&+\lambda\{(2\,F_{xx}^2+F_{yy}^2+2\,F_{xy}^2-2\,F_{xx}F_{yy})\,F_{xxxx}\\
&\quad+(F_{xx}^2+2\,F_{yy}^2+2\,F_{xy}^2-2\,F_{xx}F_{yy})\,F_{yyyy}\\
&\quad+2\,(F_{xx}F_{yy}+8\,F_{xy}^2)\,F_{xxyy}\\
&\quad+2\,(2\,F_{xx}-F_{yy})\,(2\,F_{xy}F_{xxxy}+F_{xxx}^2)\\
&\quad+2\,(2\,F_{yy}-F_{xx})\,(2\,F_{xy}F_{xyyy}+F_{yyy}^2)\\
&\quad+2\,(3\,F_{xx}-F_{yy})\,F_{xxy}^2+2\,(3\,F_{yy}-F_{xx})\,F_{xyy}^2\\
&\quad+2\,F_{yy}F_{xxx}F_{xyy}+2\,F_{xx}F_{xxy}F_{yyy}\\
&\quad-2\,F_{xy}(F_{xxx}F_{yyy}-F_{xxy}F_{xyy})\\
&\quad+12\,F_{xy}(F_{xxx}F_{xxy}+2\,F_{xxy}F_{xyy}+F_{xyy}F_{yyy})\}=0
\end{aligned}\right\}\qquad(3.20)$$

mit der Stoffzahl

$$\lambda=\frac{g_2}{9\,G^3}:\left(\frac{1}{9K}+\frac{1}{3G}\right)=\frac{g_2\,K}{(3\,K+G)\,G^2}\,.\qquad(3.21)$$

Wir entwickeln zuerst eine Näherungsmethode zur Behandlung der Differentialgleichung (3.20). Der Ansatz der Störungsrechnung besteht darin, daß man die Lösungen von (3.20) als Potenzreihe eines kleinen Parameters zu bestimmen sucht. Die Spannungsfunktion $F(x, y)$ wird hier als Potenzreihe in λ angesetzt:

$$F(x,y)=F^{(0)}(x,y)+\lambda\,F^{(1)}(x,y)+\lambda^2\,F^{(2)}(x,y)+\cdots.\qquad(3.22)$$

Durch Einsetzen der Reihe (3.22) in (3.20), Entwickeln nach Potenzen von λ und Nullsetzen der Koeffizienten der aufeinanderfolgenden Potenzen von λ entsteht eine Folge von linearen, inhomogenen Differentialgleichungen, die man nacheinander integrieren kann.

Die von λ freien Glieder ergeben die Differentialgleichung der „ungestörten" Aufgabe, die Bipotentialgleichung

$$\Delta\Delta F^{(0)}=0\,.\qquad(3.23)$$

Der Koeffizient von λ^1 liefert als Differentialgleichung für $F^{(1)}$:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta\Delta F^{(1)}+F_{xx}^{(0)2}F_{xxxx}^{(0)}+F_{yy}^{(0)2}F_{yyyy}^{(0)}\\
&-2(F_{xx}^{(0)2}+F_{yy}^{(0)2}-3\,F_{xx}^{(0)}F_{yy}^{(0)}-6\,F_{xy}^{(0)})\,F_{xxyy}^{(0)}\\
&+2(2\,F_{xx}^{(0)}-F_{yy}^{(0)})\,(2\,F_{xy}^{(0)}F_{xxxy}^{(0)}+F_{xxx}^{(0)2})\\
&+2(2\,F_{yy}^{(0)}-F_{xx}^{(0)})\,(2\,F_{xy}^{(0)}F_{xyyy}^{(0)}+F_{yyy}^{(0)2})\\
&+2(3\,F_{xx}^{(0)}-F_{yy}^{(0)})\,F_{xxy}^{(0)2}+2(3\,F_{yy}^{(0)}-F_{xx}^{(0)})\,F_{xyy}^{(0)2}\\
&+2\,F_{yy}^{(0)}F_{xxx}^{(0)}F_{xyy}^{(0)}+2\,F_{xx}^{(0)}F_{xxy}^{(0)}F_{yyy}^{(0)}\\
&-2\,F_{xy}^{(0)}(F_{xxx}^{(0)}F_{yyy}^{(0)}-F_{xxy}^{(0)}F_{xyy}^{(0)})\\
&+12\,F_{xy}^{(0)}(F_{xxx}^{(0)}F_{xxy}^{(0)}+2\,F_{xxy}^{(0)}F_{xyy}^{(0)}+F_{xyy}^{(0)}F_{yyy}^{(0)})=0\,.
\end{aligned}\right\}\qquad(3.24)$$

Durch Nullsetzen des Faktors von λ^2 folgt

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta\Delta F^{(2)}+(2\,F_{xx}^{(0)2}+F_{yy}^{(0)2}+2\,F_{xy}^{(0)2}-2\,F_{xx}^{(0)}F_{yy}^{(0)})\,F_{xxxx}^{(1)}\\
&+(F_{xx}^{(0)2}+2\,F_{yy}^{(0)2}+2\,F_{xy}^{(0)2}-2\,F_{xx}^{(0)}F_{yy}^{(0)})\,F_{yyyy}^{(1)}+2(F_{xx}^{(0)}F_{yy}^{(0)}+8\,F_{xy}^{(0)2})\,F_{xxyy}^{(1)}\\
&+4(2\,F_{xx}^{(0)}-F_{yy}^{(0)})\,F_{xy}^{(0)}F_{xxxy}^{(1)}+4(2\,F_{yy}^{(0)}-F_{xx}^{(0)})\,F_{xy}^{(0)}F_{xyyy}^{(1)}\\
&+4(2\,F_{xx}^{(0)}-F_{yy}^{(0)})\,F_{xxx}^{(0)}F_{xxx}^{(1)}+4(2\,F_{yy}^{(0)}-F_{xx}^{(0)})\,F_{yyy}^{(0)}F_{yyy}^{(1)}\\
&+4(3\,F_{xx}^{(0)}-F_{yy}^{(0)})\,F_{xxy}^{(0)}F_{xxy}^{(1)}+4(3\,F_{yy}^{(0)}-F_{xx}^{(0)})\,F_{xyy}^{(0)}F_{xyy}^{(1)}\\
&+2(F_{yy}^{(0)}F_{xyy}^{(0)}-F_{xy}^{(0)}F_{yyy}^{(0)}+6\,F_{xy}^{(0)}F_{xxy}^{(0)})\,F_{xxx}^{(1)}
\end{aligned}\right\}\qquad(3.25)$$

$$
\left.\begin{aligned}
&+2(F^{(0)}_{xx}F^{(0)}_{yyy}+6F^{(0)}_{xy}F^{(0)}_{xxx}+13F^{(0)}_{xy}F^{(0)}_{xyy})F^{(1)}_{xxy}\\
&+2(F^{(0)}_{yy}F^{(0)}_{xxx}+6F^{(0)}_{xy}F^{(0)}_{yyy}+13F^{(0)}_{xy}F^{(0)}_{xxy})F^{(1)}_{xyy}\\
&+2(F^{(0)}_{xx}F^{(0)}_{xxy}-F^{(0)}_{xy}F^{(0)}_{xxx}+6F^{(0)}_{xy}F^{(0)}_{xyy})F^{(1)}_{yyy}\\
&+2[(2F^{(0)}_{xxxx}+F^{(0)}_{yyyy})F^{(0)}_{xx}+3F^{(0)}_{xxyy}F^{(0)}_{yy}+2(2F^{(0)}_{xxxy}-F^{(0)}_{xyyy})F^{(0)}_{xy}\\
&\quad+2F^{(0)2}_{xxx}+3F^{(0)2}_{xxy}-F^{(0)2}_{xyy}+F^{(0)}_{xxy}F^{(0)}_{yyy}-F^{(0)2}_{yyy}]F^{(1)}_{xx}\\
&+2[(2F^{(0)}_{yyyy}+F^{(0)}_{xxxx})F^{(0)}_{yy}+3F^{(0)}_{xxyy}F^{(0)}_{xx}+2(2F^{(0)}_{xyyy}-F^{(0)}_{xxxy})F^{(0)}_{xy}\\
&\quad-F^{(0)2}_{xxx}-F^{(0)2}_{xxy}+3F^{(0)2}_{xyy}+F^{(0)}_{xxx}F^{(0)}_{xyy}+2F^{(0)2}_{yyy}]F^{(1)}_{yy}\\
&+2[12F^{(0)}_{xxyy}F^{(0)}_{xy}+2(2F^{(0)}_{xxxy}-F^{(0)}_{xyyy})F^{(0)}_{xx}+2(2F^{(0)}_{xyyy}-F^{(0)}_{xxxy})F^{(0)}_{yy}\\
&\quad-F^{(0)}_{xxx}F^{(0)}_{yyy}+F^{(0)}_{xxy}F^{(0)}_{xyy}\\
&\quad+6(F^{(0)}_{xxx}F^{(0)}_{xxy}+2F^{(0)}_{xxy}F^{(0)}_{xyy}+F^{(0)}_{xyy}F^{(0)}_{yyy})]F^{(1)}_{xy}=0\,.
\end{aligned}\right\}\qquad(3.25)
$$

Die Spannungskomponenten stellen sich dann als Potenzreihen in λ dar; denn durch Differentiation von (3.22) erhält man die Beziehungen

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_x&=\frac{\partial^2F}{\partial y^2}=\sigma_x^{(0)}+\lambda\,\sigma_x^{(1)}+\lambda^2\,\sigma_x^{(2)}+\cdots,\\
\sigma_y&=\frac{\partial^2F}{\partial x^2}=\sigma_y^{(0)}+\lambda\,\sigma_y^{(1)}+\lambda^2\,\sigma_y^{(2)}+\cdots,\\
\tau_{xy}&=-\frac{\partial^2F}{\partial x\,\partial y}=\tau_{xy}^{(0)}+\lambda\,\tau_{xy}^{(1)}+\lambda^2\,\tau_{xy}^{(2)}+\cdots,
\end{aligned}\right\}\qquad(3.26)
$$

wo

$$
\sigma_x^{(0)}=\frac{\partial^2F^{(0)}}{\partial y^2},\quad \sigma_x^{(1)}=\frac{\partial^2F^{(1)}}{\partial y^2},\quad \sigma_x^{(2)}=\frac{\partial^2F^{(2)}}{\partial y^2},\quad \text{usw.}
$$

die zweiten partiellen Ableitungen der Näherungsfunktionen $F^{(0)}$, $F^{(1)}$, $F^{(2)}$ usw. bedeuten.

In gleicher Form lassen sich auch die Invarianten (3.5) darstellen; wir schreiben

$$
s_0=\frac{1}{3K}(\sigma_0^{(0)}+\lambda\,\sigma_0^{(1)}+\lambda^2\,\sigma_0^{(2)}+\cdots)
$$

mit

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_0^{(0)}&=\frac{1}{3}(\sigma_x^{(0)}+\sigma_y^{(0)}),\\
\sigma_0^{(1)}&=\frac{1}{3}(\sigma_x^{(1)}+\sigma_y^{(1)}),\\
\sigma_0^{(2)}&=\frac{1}{3}(\sigma_x^{(2)}+\sigma_y^{(2)}),
\end{aligned}\right\}\qquad(3.27)
$$

und

$$
t_0^2=\frac{2}{9G^2}(\Phi^{(0)}+\lambda\,\Phi^{(1)}+\lambda^2\,\Phi^{(2)}+\cdots)
$$

durch die Festsetzung

$$
\left.\begin{aligned}
\Phi^{(0)}&=\sigma_x^{(0)2}+\sigma_y^{(0)2}-\sigma_x^{(0)}\sigma_y^{(0)}+3\,\tau_{xy}^{(0)2},\\
\Phi^{(1)}&=2\,\sigma_x^{(0)}\sigma_x^{(1)}+2\,\sigma_y^{(0)}\sigma_y^{(1)}-\sigma_x^{(0)}\sigma_y^{(1)}-\sigma_x^{(1)}\sigma_y^{(0)}+6\,\tau_{xy}^{(0)}\tau_{xy}^{(1)}\,.
\end{aligned}\right\}\qquad(3.28)
$$

Sobald die Spannungskomponenten (3.26) und die Invarianten (3.27) und (3.28) bekannt sind, kann man die Verschiebungen ermitteln. Mit der Annahme der Funktionen $k(s_0)$ und $g(t_0^2)$ in der Form (2.10) lauten die Spannungs-Dehnungsgleichungen (3.4) des ebenen Spannungszustandes

$$
\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x&=\frac{1}{3K}\sigma_0+\frac{1}{2G}(1+g_2\,t_0^2)\,\sigma_x'\,,\\
\varepsilon_y&=\frac{1}{3K}\sigma_0+\frac{1}{2G}(1+g_2\,t_0^2)\,\sigma_y'\,,\\
\psi_{xy}&=\frac{1}{G}(1+g_2\,t_0^2)\,\tau_{xy}
\end{aligned}\right\}\qquad(3.29)
$$

mit $\qquad \sigma_x'=(\sigma_x-\sigma_0)\,,\quad \sigma_y'=(\sigma_y-\sigma_0)\,.$

Zur Auffindung der Verschiebungen werden jetzt sowohl für die Verschiebungen u, v als auch

für die Verzerrungen ε_x, ε_y und ψ_{xy} Ansätze von der Form (3.22) eingeführt, also

$$\left.\begin{aligned} u &= u^{(0)} + \lambda\, u^{(1)} + \lambda^2\, u^{(2)} + \cdots, \\ v &= v^{(0)} + \lambda\, v^{(1)} + \lambda^2\, v^{(2)} + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{3.30}$$

und

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x^{(0)} + \lambda\, \varepsilon_x^{(1)} + \lambda^2\, \varepsilon_x^{(2)} + \cdots, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y^{(0)} + \lambda\, \varepsilon_y^{(1)} + \lambda^2\, \varepsilon_y^{(2)} + \cdots, \\ \psi_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \psi_{xy}^{(0)} + \lambda\, \psi_{xy}^{(1)} + \lambda^2\, \psi_{xy}^{(2)} + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{3.31}$$

gesetzt. In (3.29) drücken wir nun alle Spannungs- und Verzerrungsgrößen durch die entsprechenden Potenzreihen in λ aus. Beachtet man die Abkürzung (3.21), so läßt sich die rechte Seite nach Potenzen von λ ordnen, und durch Vergleich der Koeffizienten gleicher Potenzen auf beiden Seiten erhalten wir die Koeffizienten der Entwicklungen in (3.31).

Für die nullte Näherung erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x^{(0)} &= \frac{1}{3K}\sigma_0^{(0)} + \frac{1}{2G}\sigma_x'^{(0)}, \\ \varepsilon_y^{(0)} &= \frac{1}{3K}\sigma_0^{(0)} + \frac{1}{2G}\sigma_y'^{(0)}, \\ \psi_{xy}^{(0)} &= \frac{1}{G}\tau_{xy}^{(0)}. \end{aligned}\right\} \tag{3.32}$$

Sie stellt die „ungestörten" Verzerrungskomponenten beim *Hooke*schen Gesetz ($\lambda = 0$) dar. Durch Vergleich der Koeffizienten von λ folgt

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x^{(1)} &= \frac{1}{3K}\sigma_0^{(1)} + \frac{1}{2G}\sigma_x'^{(1)} + \left(\frac{1}{9K} + \frac{1}{3G}\right)\sigma_x'^{(0)}\,\Phi^{(0)}, \\ \varepsilon_y^{(1)} &= \frac{1}{3K}\sigma_0^{(1)} + \frac{1}{2G}\sigma_y'^{(1)} + \left(\frac{1}{9K} + \frac{1}{3G}\right)\sigma_y'^{(0)}\,\Phi^{(0)}, \\ \psi_{xy}^{(1)} &= \frac{1}{G}\tau_{xy}^{(1)} + 2\left(\frac{1}{9K} + \frac{1}{3G}\right)\tau_{xy}^{(0)}\,\Phi^{(0)}, \end{aligned}\right\} \tag{3.33}$$

und die Koeffizienten von λ^2 ergeben

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x^{(2)} &= \frac{1}{3K}\sigma_0^{(2)} + \frac{1}{2G}\sigma_x'^{(2)} + \left(\frac{1}{9K} + \frac{1}{3G}\right)(\sigma_x'^{(1)}\,\Phi^{(0)} + \sigma_x'^{(0)}\,\Phi^{(1)}), \\ \varepsilon_y^{(2)} &= \frac{1}{3K}\sigma_0^{(2)} + \frac{1}{2G}\sigma_y'^{(2)} + \left(\frac{1}{9K} + \frac{1}{3G}\right)(\sigma_y'^{(1)}\,\Phi^{(0)} + \sigma_y'^{(0)}\,\Phi^{(1)}), \\ \psi_{xy}^{(2)} &= \frac{1}{G}\tau_{xy}^{(2)} + 2\left(\frac{1}{9K} + \frac{1}{3G}\right)(\tau_{xy}^{(1)}\,\Phi^{(0)} + \tau_{xy}^{(0)}\,\Phi^{(1)}). \end{aligned}\right\} \tag{3.34}$$

Aus den Verzerrungskomponenten werden nun die Verschiebungen u, v selbst ermittelt. Die Integration von (3.32) bis (3.34) bereitet für einfach zusammenhängende Bereiche im allgemeinen keine Schwierigkeiten.

Als Beispiel wollen wir die Spannungen in einem Balken von der Höhe $2b$ und der Länge l berechnen, der an einem Ende eingespannt und am anderen freien Ende durch eine Last Q nach Abb. 4 belastet wird. Die als klein anzusehende Dicke h des Balkens senkrecht zur Zeichenebene ist gleich Eins gesetzt.

Abb. 4. Einseitig eingespannter Balken.

In der linearen Elastizitätstheorie wird dieser Spannungszustand durch die Spannungsfunktion nullter Ordnung [1]

$$F^{(0)} = \frac{1}{6}\,c\,x(y^3 - 3\,b^2\,y) \quad \text{mit} \quad c = -\frac{3}{2}\frac{Q}{b^3} \tag{3.35}$$

[1] Vgl. *S. Timoshenko*, Theory of Elasticity, 1. Aufl., S. 33, New York 1934.

beschrieben. Nach (3.8) erhalten wir hieraus die Spannungskomponenten

$$\sigma_x^{(0)} = c\,x\,y\,, \quad \sigma_y^{(0)} = 0\,, \quad \tau_{xy}^{(0)} = -\frac{c}{2}(y^2 - b^2)\,, \tag{3.36}$$

die den Randbedingungen der Aufgabe genügen. Denn

$$\begin{aligned} &\text{für} \quad y = \pm b \quad &&\text{ist} \quad \sigma_y^{(0)} = \tau_{xy}^{(0)} = 0\,, \\ &\text{für} \quad x = 0 \quad &&\text{ist} \quad \sigma_x^{(0)} = 0\,; \end{aligned}$$

außerdem ist dort die Resultierende der Schubspannungen im Querschnitt $\int_{-b}^{+b} \tau_{xy}^{(0)}\,dy = -Q$.

Für die erste Näherungsfunktion erhält man nach (3.24) die Gleichung

$$\Delta\Delta F^{(1)} = -2c^3(2x^3y + 8xy^3 - 5b^2xy) \tag{3.37}$$

mit den sog. homogenen Randbedingungen:

$$\left.\begin{aligned} &\text{in} \quad y = \pm b \quad &&\text{muß} \quad \sigma_y^{(1)} = \tau_{xy}^{(1)} = 0\,, \\ &\text{in} \quad x = 0 \quad &&\text{muß} \quad \sigma_x^{(1)} = 0\,, \quad \int_{-b}^{+b} \tau_{xy}^{(1)}\,dy = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.38}$$

sein. Durch Einsetzen bestätigt man, daß sich ein partikuläres Integral von (3.37) in der Form

$$F_p^{(1)} = -\frac{c^3}{180}\left(6x^3y^5 + \frac{12}{7}xy^7 - 25b^2x^3y^3\right)$$

darstellen läßt. Zu dieser Partikulärlösung nimmt man eine Lösung der homogenen Gleichung $\Delta\Delta F^{(1)} = 0$ hinzu, welche aus bekannten Polynomlösungen der Bipotentialgleichung [1] zusammengesetzt ist:

$$F_a^{(1)} = d_6\left(\frac{1}{3}x^3y^3 - \frac{1}{5}xy^5\right) + b_4\frac{1}{3\cdot 2}x^3y + d_4\frac{1}{3\cdot 2}xy^3 + b_2xy\,.$$

Die hierin auftretenden Festwerte d_6, b_4, d_4 und b_2 sind derart zu bestimmen, daß die Funktion $F^{(1)} = F_p^{(1)} + F_a^{(1)}$ sämtliche Randbedingungen (3.38) befriedigt. Nach kurzer Rechnung findet man die erste Näherungsfunktion

$$F^{(1)} = -\frac{c^3}{60}\left(2x^3y^5 + \frac{4}{7}xy^7 - 4b^2x^3y^3 - \frac{13}{5}b^2xy^5 + 2b^4x^3y + \frac{122}{35}b^4xy^3 - \frac{51}{35}b^6xy\right). \tag{3.39}$$

Die Verbesserungsglieder erster Ordnung der Spannungen errechnen sich dann zu

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x^{(1)} &= -\frac{c^3}{15}xy\left(10x^2y^2 - 6b^2x^2 + 6y^4 - 13b^2y^2 + \frac{183}{35}b^4\right), \\ \sigma_y^{(1)} &= -\frac{c^3}{5}xy(y^2 - b^2)^2, \\ \tau_{xy}^{(1)} &= \frac{c^3}{60}\left(30x^2y^4 - 36b^2x^2y^2 + 6b^4x^2 + 4y^6 - 13b^2y^4 + \frac{366}{35}b^4y^2 - \frac{51}{35}b^6\right). \end{aligned}\right\} \tag{3.40}$$

Nunmehr kann die Differentialgleichung für die zweite Näherungsfunktion $F^{(2)}$ nach (3.25) angeschrieben werden. Sie lautet

$$\left.\begin{aligned} \Delta\Delta F^{(2)} = \frac{c^5}{15}\Big(&400x^5y^3 + 1858x^3y^5 + 944xy^7 - 72b^2x^2y - 2000b^2x^3y^3 - 2298b^2xy^5 \\ &+ \frac{12486}{35}b^4x^3y + \frac{57434}{35}b^4xy^3 - \frac{2232}{7}b^6xy\Big) \end{aligned}\right\} \tag{3.41}$$

mit den mit dem Zeiger (2) geschriebenen homogenen Randbedingungen (3.38). Man findet zunächst leicht ein partikuläres Integral dieser Gleichung. Sodann fügt man hierzu eine Lösung der homogenen Gleichung, welche eine genügende Zahl von verfügbaren Konstanten enthält, um die Randbedingungen des Problems befriedigen zu können. So erhält man folgende

[1] Vgl. *S. Timoshenko*, a. a. O. S. 27.

Funktion:

$$\left.\begin{aligned} F^{(2)} = \frac{c^5}{315}\Big(&10\,x^5\,y^7 + \frac{529}{72}\,x^3\,y^9 + \frac{31}{20}\,x\,y^{11} - \frac{63}{5}\,b^2\,x^5\,y^5 - 38\,b^2\,x^3\,y^7 - \frac{73}{8}\,b^2\,x\,y^9 \\ &- \frac{24}{5}\,b^4\,x^5\,y^3 + \frac{7203}{100}\,b^4\,x^3\,y^5 + \frac{2113}{100}\,b^4\,x\,y^7 \\ &+ \frac{37}{5}\,b^6\,x^5\,y - \frac{13376}{225}\,b^6\,x^3\,y^3 - \frac{10324}{375}\,b^6\,x\,y^5 \\ &+ \frac{10843}{600}\,b^8\,x^3\,y + \frac{7658}{375}\,b^8\,x\,y^3 - \frac{19337}{3000}\,b^{10}\,x\,y\Big). \end{aligned}\right\} \tag{3.42}$$

Hieraus leiten sich nach (3.8) die Korrektionen zweiter Ordnung $\sigma_x^{(2)}$, $\sigma_y^{(2)}$ und $\tau_{xy}^{(2)}$ für die Spannungen ab, die wir aber hier nicht anschreiben wollen.

Die errechnete Spannungsverteilung ist nur dann streng richtig, wenn die Belastung am freien Ende durch stetig verteilte Kräfte, entsprechend dem ermittelten Verlauf der Schubspannungen $\tau_{xy} = \tau_{xy}^{(0)} + \lambda\,\tau_{xy}^{(1)} + \lambda^2\,\tau_{xy}^{(2)} + \cdots$, auf den Endquerschnitt übertragen wird. Greift die äußere Kraft Q nicht in der vorgeschriebenen Weise an, so wird der Spannungszustand nach dem *St. Venant*schen Prinzip nur in der unmittelbaren Umgebung des freien Endes beeinflußt.

Wir behandeln noch die Formänderung des Balkens. Dabei nehmen wir an, der Mittelpunkt des Endquerschnitts sei so festgehalten, daß folgende geometrische Randbedingungen gelten:

$$u = v = \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \text{für} \qquad x = l\,, \quad y = 0\,. \tag{3.43}$$

Mit den in (3.36) gerechneten Spannungen erhalten wir nach (3.32) die Verzerrungskomponenten für die Näherungslösung nullter Ordnung

$$\varepsilon_x^{(0)} = \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} = \left(\frac{1}{9\,K} + \frac{1}{3\,G}\right) c\,x\,y\,, \qquad \varepsilon_y^{(0)} = \frac{\partial v^{(0)}}{\partial y} = \left(\frac{1}{9\,K} - \frac{1}{6\,G}\right) c\,x\,y\,,$$

$$\psi_{xy}^{(0)} = \frac{\partial u^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(0)}}{\partial x} = -\frac{c}{2\,G}\,(y^2 - b^2)\,,$$

woraus die Verschiebungen nullter Ordnung[1] folgen:

$$\left.\begin{aligned} u^{(0)} &= \frac{1}{9\,K}\,\frac{c}{2}\left(x^2\,y - \frac{y^3}{3} - l^2\,y\right) + \frac{1}{3\,G}\,\frac{c}{2}\left(x^2\,y - \frac{5}{6}\,y^3 - l^2\,y + 3\,b^2\,y\right), \\ v^{(0)} &= \frac{1}{9\,K}\,\frac{c}{2}\left(x\,y^2 - \frac{x^3}{3} + l^2\,x - \frac{2}{3}\,l^3\right) - \frac{1}{3\,G}\,\frac{c}{2}\left(\frac{1}{2}\,x\,y^2 + \frac{1}{3}\,x^3 - l^2\,x + \frac{2}{3}\,l^3\right). \end{aligned}\right\} \tag{3.44}$$

Nach (3.33) findet man leicht die Verbesserungsglieder erster Ordnung der Verzerrungskomponenten in der Form

$$\varepsilon_x^{(1)} = \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} = -\frac{1}{9\,K}\,\frac{c^3}{60}\left(6\,x\,y^5 - 24\,b^2\,x^3\,y - 16\,b^2\,x\,y^3 + \frac{102}{35}\,b^4\,x\,y\right)$$
$$-\frac{1}{3\,G}\,\frac{c^3}{60}\left(-12\,x\,y^5 - 24\,b^2\,x^3\,y + 20\,b^2\,x\,y^3 - \frac{528}{35}\,b^4\,x\,y\right),$$

$$\varepsilon_y^{(1)} = \frac{\partial v^{(1)}}{\partial y} = -\frac{1}{9\,K}\,\frac{c^3}{60}\left(60\,x^3\,y^3 + 51\,x\,y^5 - 24\,b^2\,x^3\,y - 106\,b^2\,x\,y^3 + \frac{1677}{35}\,b^4\,x\,y\right)$$
$$-\frac{1}{3\,G}\,\frac{c^3}{60}\left(15\,x\,y^5 + 12\,b^2\,x^3\,y - 28\,b^2\,x\,y^3 + \frac{579}{35}\,b^4\,x\,y\right),$$

$$\psi_{xy}^{(1)} = \frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} = -\frac{1}{9\,K}\,\frac{c^3}{60}\,(60\,x^2\,y^4 + 45\,y^6 - 60\,b^2\,x^2\,y^2 - 135\,b^2\,y^4 + 135\,b^4\,y^2 - 45\,b^6)$$
$$-\frac{1}{3\,G}\,\frac{c^3}{60}\left(-30\,x^2\,y^4 + 33\,y^6 + 48\,b^2\,x^2\,y^2 - 96\,b^2\,y^4 - 18\,b^4\,x^2 + \frac{3627}{35}\,b^4\,y^2 - \frac{1116}{35}\,b^6\right).$$

[1] Vgl. *S. Timoshenko*, a. a. O. S. 36.

Die Integration dieser Gleichungen liefert unter Berücksichtigung von (3.43) die Verbesserungen erster Ordnung für die Verschiebungen

$$
\left.\begin{aligned}
u^{(1)} = &-\frac{1}{9K}\frac{c^3}{60}\Big(3x^2y^5 - 6b^2x^4y - 8b^2x^2y^3 + \frac{51}{35}b^4x^2y \\
&\quad + \frac{73}{14}y^7 - \frac{217}{10}b^2y^5 + \frac{2591}{70}b^4y^3 - 45b^6y + 6b^2l^4y - \frac{51}{35}b^4l^2y\Big) \\
&-\frac{1}{3G}\frac{c^3}{60}\Big(-6x^2y^5 - 6b^2x^4y + 10b^2x^2y^3 - \frac{264}{35}b^4x^2y \\
&\quad + \frac{61}{14}y^7 - \frac{89}{5}b^2y^5 + \frac{445}{14}b^4y^3 - \frac{1116}{35}b^6y + 6b^2l^4y - \frac{366}{35}b^4l^2y\Big), \\
v^{(1)} = &-\frac{1}{9K}\frac{c^3}{60}\Big(15x^3y^4 + \frac{17}{2}xy^6 - 12b^2x^3y^2 - \frac{53}{2}b^2xy^4 + \frac{1677}{70}b^4xy^2 \\
&\quad + \frac{6}{5}b^2x^5 - \frac{17}{35}b^4x^3 - 6b^2l^4x + \frac{51}{35}b^4l^2x + \frac{24}{5}b^2l^5 - \frac{34}{35}b^4l^3\Big) \\
&-\frac{1}{3G}\frac{c^3}{60}\Big(\frac{5}{2}xy^6 + 6b^2x^3y - 7b^2xy^4 + \frac{579}{70}b^4xy^2 \\
&\quad + \frac{6}{5}b^2x^5 - \frac{122}{35}b^4x^3 - 6b^2l^4x + \frac{366}{35}b^4l^2x + \frac{24}{5}b^2l^5 - \frac{244}{35}b^4l^3\Big).
\end{aligned}\right\} \tag{3.45}
$$

In gleicher Weise berechnet man die Korrektionsglieder zweiter Ordnung, deren Richtigkeit leicht nachgeprüft werden kann:

$$
\left.\begin{aligned}
u^{(2)} = &\frac{1}{9K}\frac{c^5}{315}\Big(30x^4y^7 + \frac{188}{3}x^2y^9 - \frac{231}{2}b^2x^4y^5 - \frac{507}{2}b^2x^2y^7 - \frac{24}{5}b^4x^6y + 129b^4x^4y^3 \\
&\quad + \frac{38847}{100}b^4x^2y^5 - \frac{3101}{150}b^6x^4y - \frac{22459}{75}b^6x^2y^3 + \frac{44127}{500}b^8x^2y \\
&\quad + \frac{8513}{1320}y^{11} - \frac{955}{36}b^2y^9 + \frac{5713}{350}b^4y^7 - \frac{260339}{3000}b^6y^5 + \frac{66207}{1000}b^8y^3 \\
&\quad - \frac{1377}{40}b^{10}y + \frac{24}{5}b^4l^6y + \frac{3101}{150}b^6l^4y + \frac{6687}{125}b^8l^2y\Big) \\
&+\frac{1}{3G}\frac{c^5}{315}\Big(-45x^4y^7 + \frac{1421}{48}x^2y^9 - 21b^2x^4y^5 - \frac{165}{2}b^2x^2y^7 - \frac{24}{5}b^4x^6y + 165b^4x^4y^3 \\
&\quad + \frac{12867}{200}b^4x^2y^5 - \frac{5713}{75}b^6x^4y - \frac{479}{15}b^6x^2y^3 + \frac{13863}{2000}b^8x^2y \\
&\quad + \frac{1361}{330}y^{11} - \frac{1335}{36}b^2y^9 + \frac{98479}{1400}b^4y^7 - \frac{232451}{3000}b^6y^5 - \frac{11839}{200}b^8y^3 \\
&\quad - \frac{1886}{125}b^{10}y + \frac{24}{5}b^4l^6y - \frac{2612}{75}b^6l^4y - \frac{55653}{2000}b^8ly\Big), \\
v^{(2)} = &\frac{1}{9K}\frac{c^5}{315}\Big(105x^5y^6 + \frac{501}{4}x^3y^8 + \frac{2837}{120}xy^{10} - \frac{189}{2}b^2x^5y^4 - 413b^2x^3y^6 - \frac{2059}{8}b^2xy^8 \\
&\quad - \frac{72}{5}b^4x^5y^2 + \frac{8637}{20}b^4x^3y^4 + \frac{12077}{50}b^4xy^6 - \frac{20377}{150}b^6x^3y^2 \\
&\quad - \frac{145051}{600}b^6xy^4 + \frac{117279}{1000}b^8xy^2 + \frac{24}{35}b^4x^7 + \frac{3101}{750}b^6x^5 + \frac{2229}{125}b^8x^3 \\
&\quad - \frac{24}{5}b^4l^6x - \frac{3101}{150}b^6l^4x - \frac{6687}{125}b^8l^2x + \frac{144}{35}b^4l^7 + \frac{6202}{375}b^6l^5 + \frac{4458}{125}b^8l^3\Big) \\
&+\frac{1}{3G}\frac{c^5}{315}\Big(\frac{417}{16}x^3y^8 - \frac{121}{60}xy^{10} - 14b^2x^3y^6 + \frac{3}{4}b^2xy^8 + \frac{36}{5}b^4x^5y^2 - \frac{867}{8}b^4x^3y^4 \\
&\quad + \frac{787}{40}b^4xy^6 + \frac{19751}{150}b^6x^3y^2 - \frac{21163}{600}b^6xy^4 + \frac{25383}{1000}b^8xy^2 \\
&\quad + \frac{24}{35}b^4x^7 - \frac{2612}{375}b^6x^5 - \frac{18551}{2000}b^8x^3 - \frac{24}{5}b^4l^6x + \frac{2612}{75}b^6l^4x \\
&\quad + \frac{55653}{2000}b^8l^2x + \frac{144}{35}b^4l^7 - \frac{10448}{375}b^6l^5 - \frac{18551}{1000}b^8l^3\Big).
\end{aligned}\right\} \tag{3.46}
$$

Z a h l e n b e i s p i e l: Es sei $Q = 33{,}3$ kg, $b = 5$ cm, $l = 50$ cm; Werkstoff: Kupfer [1] mit $K = 1{,}33 \cdot 10^6$ kg/cm², $G = 0{,}47 \cdot 10^6$ kg/cm², $g_2 = 7{,}26 \cdot 10^6$, also nach (3.21) $\lambda = 0{,}98 \cdot 10^{-3}$ cm⁴/kg². Es soll die Normalspannung σ_x an der Stelle $x = l$, $y = -b$ ermittelt werden. Wir erhalten

$$\sigma_x^{(0)} = 100{,}0 \text{ kg/cm}^2, \quad \lambda\,\sigma_x^{(1)} = -2{,}60 \text{ kg/cm}^2, \quad \lambda^2\,\sigma_x^{(2)} = +0{,}42 \text{ kg/cm}^2 .$$

Mit diesen Werten ergibt die zweite Näherungslösung der Spannungen gemäß (3.26) den Randwert (für $x = l$, $y = -b$) $\sigma_x^{(II)} = 97{,}82$ kg/cm². Die maximale Normalspannung verringert sich demnach gegenüber dem Wert der linearen Theorie um 2,18 %.

Nun ermitteln wir noch die Durchbiegung für das belastete Ende ($x = 0$, $y = 0$). Wir erhalten

$$v^{(0)} = 13{,}22 \cdot 10^{-3} \text{ cm}, \quad \lambda\, v^{(1)} = +0{,}31 \cdot 10^{-3} \text{ cm}, \quad \lambda^2\, v^{(2)} = -0{,}47 \cdot 10^{-5} \text{ cm} .$$

Mit diesen Ergebnissen liefert die zweite Näherungslösung für die Durchbiegung an der Stelle $x = 0$, $y = 0$ den Wert $v^{(II)} = 13{,}52 \cdot 10^{-3}$ cm; also beträgt der Unterschied gegenüber dem Wert der linearen Theorie bei gleicher Belastung + 2,28 %. Wir werden aber in späteren Beispielen einen zahlenmäßig viel größeren Einfluß der Nichtlinearität des Elastizitätsgesetzes finden.

In gleicher Weise mit Hilfe der Methode der Störungsrechnung läßt sich der beiderseits aufliegende, gleichmäßig belastete Balken behandeln. (In der Dissertation sind die Verbesserungen erster Ordnung angegeben.)

4. Der ebene Spannungszustand in Polarkoordinaten. Für viele Aufgaben ist es bekanntlich vorteilhaft, ebene Polarkoordinaten r, φ an Stelle der kartesischen Koordinaten x, y zu verwenden. Der ebene Spannungszustand einer Scheibe im Punkt (r, φ) ist dann durch die Normalspannung σ_r in Richtung des Radius r, die senkrecht dazu stehende Normalspannung σ_φ und die Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ bestimmt.

Da die Darstellung der Spannungen durch eine Spannungsfunktion unabhängig vom Koordinatensystem ist, können wir diese Spannungen aus einer Spannungsfunktion $F(r, \varphi)$ folgendermaßen ableiten:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}, \\ \sigma_\varphi &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \\ \tau_{r\varphi} &= -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right). \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

In (3.9) haben wir die Differentialgleichung der *Airy*schen Spannungsfunktion in rechtwinkligen Koordinaten hergeleitet. Mit Benützung der bekannten Transformationsformeln [2] auf das Polarkoordinatensystem umgeschrieben lautet sie

$$\left.\begin{aligned} \Delta\left\{\left[\frac{1}{9K}k(s_0) + \frac{1}{3G}g(t_0^2)\right]\Delta F\right\} - \frac{1}{2G}\left[\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\right)\frac{\partial^2 g(t_0^2)}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g(t_0^2)}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g(t_0^2)}{\partial r}\right)\right. \\ \left. - 2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial \varphi} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 g(t_0^2)}{\partial r\,\partial \varphi} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial g(t_0^2)}{\partial \varphi}\right)\right] = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} s_0 &= \frac{1}{9K}(\sigma_r + \sigma_\varphi) = \frac{1}{9K}\Delta F = \frac{1}{9K}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\right), \\ t_0^2 &= \frac{2}{9G^2}(\sigma_r^2 + \sigma_\varphi^2 - \sigma_r\,\sigma_\varphi + 3\,\tau_{r\varphi}^2) \\ &= \frac{2}{9G^2}\left[(\Delta F)^2 + 3\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial \varphi} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)^2 - 3\,\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

[1] Siehe *H. Kauderer*, a. a. O. S. 468.

[2] Vgl. etwa *K. Knopp*, Einführung in die höhere Mathematik, Bd. II, S. 360, 8. Aufl., Stuttgart 1947.

Beschränkt man sich auf den schon im vorigen Abschnitt behandelten Sonderfall, daß die Kompressions- und Schubfunktion in der Form (2.10) darstellbar sind, so vereinfacht sich (4.3) zu

$$
\begin{aligned}
\Delta\Delta F + \lambda \Big\{ & F_{rrrr}\left[2\left(F_{rr}-\frac{1}{r}F_r-\frac{1}{r^2}F_{\varphi\varphi}\right)F_{rr}+\left(\frac{1}{r}F_r+\frac{1}{r^2}F_{\varphi\varphi}\right)^2+2\left(\frac{1}{r}F_{r\varphi}-\frac{1}{r^2}F_\varphi\right)^2\right] \\
& +\frac{2}{r^2}F_{rr\varphi\varphi}\left[\left(\frac{1}{r}F_r+\frac{1}{r^2}F_{\varphi\varphi}\right)F_{rr}+8\left(\frac{1}{r}F_{r\varphi}-\frac{1}{r^2}F_\varphi\right)^2\right] \\
& +\frac{1}{r^4}F_{\varphi\varphi\varphi\varphi}\left[\left(F_{rr}-\frac{2}{r}F_r-\frac{2}{r^2}F_{\varphi\varphi}\right)F_{rr}+2\left(\frac{1}{r}F_r+\frac{1}{r^2}F_{\varphi\varphi}\right)^2\right. \\
& \qquad \left. +2\left(\frac{1}{r}F_{r\varphi}-\frac{1}{r^2}F_\varphi\right)^2\right] \\
& +\frac{4}{r}F_{rrr\varphi}\left(\frac{1}{r}F_{r\varphi}-\frac{1}{r^2}F_\varphi\right)\left(2F_{rr}-\frac{1}{r}F_r-\frac{1}{r^2}F_{\varphi\varphi}\right) \\
& -\frac{4}{r^3}F_{r\varphi\varphi\varphi}\left(\frac{1}{r}F_{r\varphi}-\frac{1}{r^2}F_\varphi\right)\left(F_{rr}-\frac{2}{r}F_r-\frac{2}{r^2}F_{\varphi\varphi}\right) \\
& +2F_{rrr}^2\left(2F_{rr}-\frac{1}{r}F_r-\frac{1}{r^2}F_{\varphi\varphi}\right)+\frac{2}{r^2}F_{rr\varphi}^2\left(3F_{rr}-\frac{1}{r}F_r-\frac{1}{r^2}F_{\varphi\varphi}\right) \\
& -\frac{2}{r^4}F_{r\varphi\varphi}^2\left(F_{rr}-\frac{3}{r}F_r-\frac{3}{r^2}F_{\varphi\varphi}\right)-\frac{2}{r^6}F_{\varphi\varphi\varphi}^2\left(F_{rr}-\frac{2}{r}F_r-\frac{2}{r^2}F_{\varphi\varphi}\right) \\
& +\frac{2}{r^2}F_{rrr}F_{r\varphi\varphi}\left(\frac{1}{r}F_r+\frac{1}{r^2}F_{\varphi\varphi}\right)+\frac{2}{r^4}F_{rr\varphi}F_{\varphi\varphi\varphi}F_{rr} \\
& -\frac{2}{r^3}F_{rrr}F_{\varphi\varphi\varphi}\left(\frac{1}{r}F_{r\varphi}-\frac{1}{r^2}F_\varphi\right)+\frac{12}{r}F_{rrr}F_{rr\varphi}\left(\frac{1}{r}F_{r\varphi}-\frac{1}{r^2}F_\varphi\right) \\
& +\frac{26}{r^3}F_{rr\varphi}F_{r\varphi\varphi}\left(\frac{1}{r}F_{r\varphi}-\frac{1}{r^2}F_\varphi\right)+\frac{12}{r^5}F_{r\varphi\varphi}F_{\varphi\varphi\varphi}\left(\frac{1}{r}F_{r\varphi}-\frac{1}{r^2}F_\varphi\right) \\
& -\frac{2}{r}F_{rrr}\left[-\frac{2}{r}F_{rr}F_r-\frac{2}{r^2}F_{rr}F_{\varphi\varphi}+\frac{1}{r^2}F_r^2+\frac{3}{r^3}F_rF_{\varphi\varphi}+\frac{2}{r^4}F_{r\varphi}^2\right. \\
& \qquad \left. +\frac{7}{r^2}F_{r\varphi}^2-\frac{13}{r^3}F_{r\varphi}F_\varphi+\frac{6}{r^4}F_\varphi^2\right] \\
& -\frac{2}{r^2}F_{rr\varphi}\left[\frac{14}{r}F_{rr}F_{r\varphi}-\frac{15}{r^2}F_{rr}F_\varphi-\frac{9}{r^2}F_rF_{r\varphi}+\frac{9}{r^3}F_rF_\varphi+\frac{4}{r^3}F_{r\varphi}F_{\varphi\varphi}-\frac{4}{r^4}F_\varphi F_{\varphi\varphi}\right] \\
& +\frac{2}{r^3}F_{r\varphi\varphi}\left[F_{rr}^2-\frac{2}{r}F_{rr}F_r-\frac{6}{r^3}F_rF_{\varphi\varphi}-\frac{6}{r^4}F_{\varphi\varphi}^2-\frac{34}{r^2}F_{r\varphi}^2+\frac{74}{r^3}F_{r\varphi}F_\varphi-\frac{40}{r^4}F_\varphi^2\right] \\
& +\frac{2}{r^4}F_{\varphi\varphi\varphi}\left[\frac{4}{r}F_{rr}F_{r\varphi}-\frac{6}{r^2}F_{rr}F_\varphi-\frac{6}{r^2}F_rF_{r\varphi}+\frac{10}{r^3}F_rF_\varphi-\frac{12}{r^3}F_{r\varphi}F_{\varphi\varphi}+\frac{16}{r^4}F_\varphi F_{\varphi\varphi}\right] \\
& +\frac{1}{r^2}F_{rr}^2-\frac{3}{r^3}F_{rr}^2F_r+\frac{2}{r^4}F_{rr}F_r^2-\frac{4}{r^4}F_{rr}^2F_{\varphi\varphi}+\frac{32}{r^4}F_{rr}F_{r\varphi}^2+\frac{6}{r^5}F_{rr}F_rF_{\varphi\varphi} \\
& -\frac{60}{r^5}F_{rr}F_{r\varphi}F_\varphi-\frac{18}{r^5}F_rF_{r\varphi}^2+\frac{2}{r^6}F_{rr}F_{\varphi\varphi}^2+\frac{26}{r^6}F_{rr}F_\varphi^2+\frac{2}{r^6}F_r^2F_{\varphi\varphi} \\
& +\frac{32}{r^6}F_rF_{r\varphi}F_\varphi+\frac{52}{r^6}F_{r\varphi}^2F_{\varphi\varphi}+\frac{10}{r^7}F_rF_{\varphi\varphi}^2-\frac{10}{r^7}F_rF_\varphi^2-\frac{120}{r^7}F_{r\varphi}F_\varphi F_{\varphi\varphi} \\
& +\frac{72}{r^8}F_\varphi^2F_{\varphi\varphi}+\frac{8}{r^8}F_{\varphi\varphi}^3\Big\}=0
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

mit der Stoffzahl

$$
\lambda=\frac{g_2}{9G^3}:\left(\frac{1}{9K}+\frac{1}{3G}\right)=\frac{g_2K}{(3K+G)G^2}. \tag{4.5}
$$

a) Einfache Lösungen in Polarkoordinaten. Wir wollen uns zuerst den einfachsten exakten Lösungen der Differentialgleichung (4.2) der *Airy*schen Spannungsfunktion zuwenden.

Der Spannungszustand, der zu der Spannungsfunktion

$$
F=Cr^2 \tag{4.6}
$$

gehört, ist von φ unabhängig. Gemäß (4.1) erhält man die Spannungskomponenten

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} = 2\,C\,, \qquad \sigma_\varphi = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = 2\,C\,, \qquad \tau_{r\varphi} = 0 \tag{4.7}$$

und nach (4.3) die Invarianten

$$s_0 = \frac{1}{9\,K}\,4\,C\,, \qquad t_0^2 = \frac{2}{9\,G^2}\,4\,C^2\,. \tag{4.8}$$

Die Funktion (4.6) mit (4.8) genügt somit der Differentialgleichung (4.2). Sie stellt den Spannungszustand einer in ihrer Ebene auf allseitig gleichen Zug von der Größe $2\,C$ beanspruchten Scheibe dar.

Wir untersuchen den Spannungszustand, der durch die Spannungsfunktion

$$F = C\,\varphi \tag{4.9}$$

beschrieben wird. Die zugehörigen Spannungskomponenten sind

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = 0\,, \qquad \tau_{r\varphi} = \frac{C}{r^2} \tag{4.10}$$

und damit kommt nach (4.3)

$$s_0 = 0\,, \qquad t_0^2 = \frac{2}{3\,G^2}\,\frac{C^2}{r^4}\,. \tag{4.11}$$

Wegen $\frac{\partial g(t_0^2)}{\partial \varphi} = \frac{dg(t_0^2)}{d(t_0^2)}\,\frac{\partial t_0^2}{\partial \varphi} = 0$ ist die Differentialgleichung (4.2) erfüllt. Der durch (4.9) gegebene Spannungszustand ist von der Richtung φ unabhängig und stellt die Beanspruchung einer Vollebene durch ein Moment M nach Abb. 5 dar. Die Konstante C berechnet sich aus dem Gleichgewicht zwischen M und den Schubspannungen $\tau_{r\varphi}$ an einem herausgeschnittenen konzentrischen Kreis von beliebigem Radius r, nämlich $M = 2\,\pi\,r^2\,\tau_{r\varphi}$, woraus $C = \frac{M}{2\,\pi}$ folgt.

Abb. 5. Vollebene mit einem Moment.

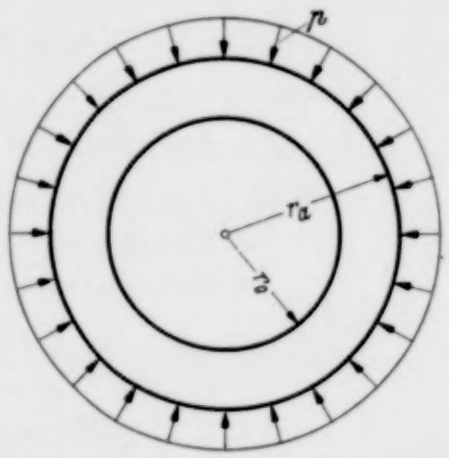


Abb. 6. Kreisringscheibe unter Außendruck.

b) Die Kreisscheibe unter gleichmäßigem Außendruck. Wir behandeln jetzt den Spannungszustand in einem geschlossenen, scheibenförmigen Kreisring, der nur an seinem Außenrand durch eine gleichmäßig verteilte Normalbelastung nach Abb. 6 beansprucht wird. Die Halbmesser seien mit r_a und r_0 bezeichnet, die gegen die Abmessungen in der Mittelebene kleine Dicke $h = 1$ gesetzt, und der gleichmäßige Druck am Scheibenrand $r = r_a$ besitze die Größe p. Es gelten also die Randbedingungen

$$(\sigma_r)_{r=r_0} = 0\,, \qquad (\sigma_r)_{r=r_a} = -\,p\,. \tag{4.12}$$

Die Belastung ruft einen drehsymmetrischen Spannungszustand hervor. Da dieser Spannungszustand vom Winkel φ unabhängig ist, verschwinden die partiellen Ableitungen der Spannungsfunktion nach φ; für die Spannungskomponenten erhalten wir die Bezeichnungen

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{dF}{dr}\,, \qquad \sigma_\varphi = \frac{d^2F}{dr^2}\,, \qquad \tau_{r\varphi} = 0\,, \tag{4.13}$$

und die Differentialgleichung (4.4) nimmt nach kurzer Umformung die Form an

$$\left.\begin{aligned}&(2\,\lambda\,r^2\,F''^2 - 2\,\lambda\,r\,F''\,F' + \lambda\,F'^2 + r^2)\,r^2\,F^{\mathrm{IV}}\\ &\quad + 2\,\lambda(2\,r\,F'' - F')\,r^3\,F'''^2 + 2\,\lambda(2\,r\,F'' - F')\,r\,F'''\,F' + 2\,r^3\,F'''\\ &\quad + (\lambda\,r^2\,F''^2 - 3\,\lambda\,r\,F''\,F' + 2\,\lambda\,F'^2 - r^2)\,F'' + r\,F' = 0\,,\end{aligned}\right\} \tag{4.14}$$

wobei Striche Ableitungen nach r bedeuten.

Man kann nun ein erstes Integral dieser Gleichung ermitteln. Es lautet

$$\left.\begin{aligned}&(2\lambda r^2 F''^2 - 2\lambda r F'' F' + \lambda F'^2 + r^2) r F''' \\ &\quad + (\lambda r F'' F' - \lambda F'^2 + r^2) F'' - r F' = C r^2\end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

mit einer willkürlichen Konstanten C. Man bestätigt es leicht, indem man das Integral (4.15) nach r ableitet und die Konstante C zwischen den beiden Gleichungen eliminiert. Analog zu der linearen Theorie stellt (4.15) für den Fall $C \neq 0$ die Differentialgleichung der reinen Biegung eines Kreisringsektors und für den Sonderfall $C = 0$ diejenige einer durch gleichmäßigen Außen- oder Innendruck beanspruchten Kreisringscheibe dar. Um dies für den Sonderfall $C = 0$ zu beweisen, ist es nötig, auf die Formänderungen einzugehen.

Wir haben also für $C = 0$ die nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\left.\begin{aligned}&(2\lambda r^2 Z'^2 - 2\lambda r Z' Z + \lambda Z^2 + r^2) r Z'' \\ &\quad + (\lambda r Z' Z - \lambda Z^2 + r^2) Z' - r Z = 0\end{aligned}\right\} \tag{4.16}$$

zu lösen, wobei zur Abkürzung $Z(r) \equiv F'(r)$ gesetzt ist. Wir wollen die Integralkurve von (4.16) in der Umgebung der Stelle $r = r_0$ durch eine Potenzreihe darstellen. Zu diesem Zweck setzen wir in (4.16) $r = \varrho + r_0$ und machen für $Z(r) = \overline{Z}(r - r_0) = \overline{Z}(\varrho)$ den Ansatz

$$\overline{Z}(\varrho) = a_1 \varrho + a_2 \varrho^2 + a_3 \varrho^3 + \cdots, \tag{4.17}$$

wobei wir das erste Glied $a_0 = 0$ setzen und somit von vornherein die erste Randbedingung (4.12) erfüllen.

Durch Einsetzen in (4.16), Ordnen nach Potenzen von ϱ und Nullsetzen der Koeffizienten gleichhoher Potenzen von ϱ bestimmen sich die Koeffizienten a_μ dieser Potenzreihe rekursiv aus folgendem Gleichungssystem:

$$2 r_0(2\lambda a_1^2 + 1) a_2 + a_1 = 0,$$

$$6 r_0^2(2\lambda a_1^2 + 1) a_3 + 16\lambda r_0^2 a_1 a_2^2 + 8 r_0(\lambda a_1^2 + 1) a_2 + \lambda a_1^3 + a_1 = 0,$$

$$\begin{aligned}&12 r_0^3(2\lambda a_1^2 + 1) a_4 + 3 r_0^2(24\lambda r_0 a_1 a_2 + 8\lambda a_1^2 + 7) a^3 \\ &\quad + 16\lambda r_0^3 a_2^3 + 36\lambda r_0^2 a_1 a_2^2 + r_0(11\lambda a_1^2 + 9) a_2 = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&20 r_0^3(2\lambda a_1^2 + 1) a_5 + 8 r_0^2(16\lambda r_0 a_1 a_2 + 6\lambda a_1^2 + 5) a_4 \\ &\quad + 72\lambda r_0^3 a_1 a_3^2 + r_0(96\lambda r_0^2 a_2^2 + 164\lambda r_0 a_1 a_2 + 25\lambda a_1^2 + 23) a_3 \\ &\quad + 40\lambda r_0^2 a_2^3 + 36\lambda r_0 a_1 a_2^2 + 3(\lambda a_1^2 + 1) a_2 = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&30 r_0^3(2\lambda a_1^2 + 1) a_6 + 5 r_0^2(40\lambda r_0 a_1 a_2 + 16\lambda a_1^2 + 13) a_5 \\ &\quad + r_0(240\lambda r_0^2 a_1 a_3 + 160\lambda r_0^2 a_2^2 + 292\lambda r_0 a_1 a_2 + 45\lambda a_1^2 + 43) a_4 \\ &\quad + 12\lambda r_0^2(15 r_0 a_2 + 14 a_1) a_3^2 + 2(122\lambda r_0^2 a_2^2 + 75\lambda r_0 a_1 a_2 + 4\lambda a_1^2 + 4) a_3 \\ &\quad + 38\lambda r_0 a_2^3 + 11\lambda a_1 a_2^2 = 0,\end{aligned}$$

usw.

Die Auflösung dieser Gleichungen ergibt

$$\left.\begin{aligned}a_2 &= -\frac{1}{2 r_0}\frac{a_1}{2\lambda a_1^2 + 1},\\ a_3 &= -\frac{1}{6 r_0^2}\frac{a_1}{(2\lambda a_1^2 + 1)^3}(4\lambda^3 a_1^6 - 3\lambda a_1^2 - 3),\\ a_4 &= \frac{1}{6 r_0^3}\frac{a_1}{(2\lambda a_1^2 + 1)^5}(16\lambda^5 a_1^{10} + 32\lambda^4 a_1^8 + 28\lambda^3 a_1^6 + 8\lambda^2 a_1^4 - 3),\\ a_5 &= -\frac{1}{120 r_0^4}\frac{a_1}{(2\lambda a_1^2 + 1)^7}(928\lambda^7 a_1^{14} + 3184\lambda^6 a_1^{12} + 4960\lambda^5 a_1^{10} + 4248\lambda^4 a_1^8 \\ &\qquad + 2410\lambda^3 a_1^6 + 803\lambda^2 a_1^4 + 225\lambda a_1^2 - 60),\\ a_6 &= \frac{1}{720 r_0^5}\frac{a_1}{(2\lambda a_1^2 + 1)^9}(13824\lambda^9 a_1^{18} + 67392\lambda^8 a_1^{16} + 146816\lambda^7 a_1^{14} + 183152\lambda^6 a_1^{12} \\ &\qquad + 149360\lambda^5 a_1^{10} + 81324\lambda^4 a_1^8 + 34464\lambda^3 a_1^6 + 10497\lambda^2 a_1^4 \\ &\qquad + 4005\lambda a_1^2 - 360),\end{aligned}\right\} \tag{4.18}$$

usw.

Die Lösung ist nun der zweiten Randbedingung (4.12) anzupassen. Man erhält

$$(\sigma_r)_{r=r_a} = \frac{1}{r_a}\frac{dF}{dr}\bigg|_{r=r_a} = \frac{1}{r_a}\bar{Z}(r_a - r_0) = -p$$

oder gemäß (4.17)

$$\frac{1}{r_a}\sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu (r_a - r_0)^\mu = -p\,, \tag{4.19}$$

womit eine Bestimmungsgleichung für die Konstante a_1 gegeben ist.

Die Spannungskomponenten σ_r und σ_φ findet man endlich nach (4.13) und (4.17) zu

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r}\frac{dF}{dr} = \frac{1}{\varrho + r_0}\bar{Z}(\varrho) = \frac{1}{\varrho + r_0}\sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu \varrho^\mu, \\ \sigma_\varphi &= \frac{d^2F}{dr^2} = \frac{d\bar{Z}(\varrho)}{d\varrho} = \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu\, a_\mu \varrho^{\mu-1}. \end{aligned}\right\} \tag{4.20}$$

Zahlenbeispiel: Es sei $p = 152{,}78\ \mathrm{kg/cm^2}$; $r_a/r_0 = 1{,}2$; Werkstoff: Kupfer[1] mit $K = 1{,}33 \cdot 10^6\ \mathrm{kg/cm^2}$, $G = 0{,}47 \cdot 10^6\ \mathrm{kg/cm^2}$, $g_2 = 7{,}26 \cdot 10^6$; also $\lambda = 0{,}98 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{cm^4/kg^2}$. Nach dem *Newton*schen Verfahren bestimmt man die Wurzel von (4.19) zu $a_1 = -923{,}9\ \mathrm{kg/cm^2}$. Aus (4.20) erhält man die Ringspannung σ_φ am Innenrand $(\sigma_\varphi)_{r=r_0} = -923{,}9\ \mathrm{kg/cm^2}$, und am Außenrand $(\sigma_\varphi)_{r=r_a} = -907{,}8\ \mathrm{kg/cm^2}$. Die entsprechenden Werte der linearen Theorie sind

$$(\sigma_\varphi^*)_{r=r_0} = -1000{,}0\ \mathrm{kg/cm^2}\,, \qquad (\sigma_\varphi^*)_{r=r_a} = -847{,}2\ \mathrm{kg/cm^2}\,.$$

Die Spannungsverteilung der nichtlinearen Theorie weicht also am Innenrand um $-7{,}61\,\%$ und am Außenrand um $+7{,}15\,\%$ ab.

c) Der ebene Keil mit einem Moment an der Spitze. Wir beschäftigen uns hier mit der Spannungsuntersuchung in einer von zwei sich schneidenden Ebenen begrenzten Scheibe, welche sich ins Unendliche erstreckt, einen halben Öffnungswinkel $\beta \leq \pi/2$ besitzt und an der Spitze durch ein Moment M nach Abb. 7 belastet ist. Die Scheibe ist in $r = \infty$ gestützt zu denken.

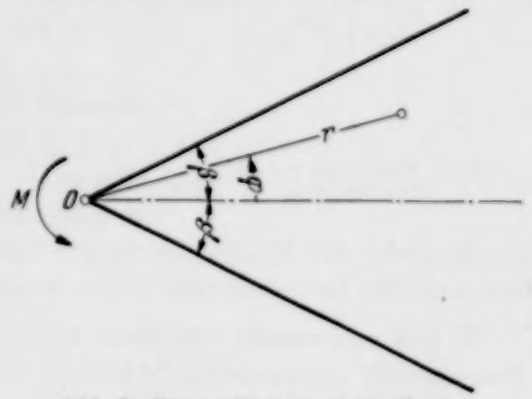


Abb. 7. Ebener Keil mit einem Moment.

Als Näherungsverfahren zur Lösung von (4.4) wenden wir die in Ziff. 3 bewährte Methode der Störungsrechnung an. Wie beim eingespannten Balken gehen wir auch hier von der bekannten strengen Lösung nullter Ordnung aus. Die Spannungsfunktion $F^{(0)}$, die der Bipotentialgleichung genügt, lautet[2]

$$F^{(0)} = c\left(\frac{\sin 2\varphi}{\cos 2\beta} - 2\varphi\right) \qquad \text{mit} \qquad c = \frac{M}{2(2\beta - \operatorname{tg} 2\beta)}\,. \tag{4.21}$$

Die Spannungen haben folgende Werte:

$$\sigma_r^{(0)} = -\frac{4c}{r^2}\frac{\sin 2\varphi}{\cos 2\beta}\,, \qquad \sigma_\varphi^{(0)} = 0\,, \qquad \tau_{r\varphi}^{(0)} = \frac{2c}{r^2}\left(\frac{\cos 2\varphi}{\cos 2\beta} - 1\right). \tag{4.22}$$

Die Randbedingungen sind streng erfüllt; denn aus (4.22) folgt $\sigma_\varphi^{(0)} = \tau_{r\varphi}^{(0)} = 0$ für $\varphi = \pm\beta$.

Mit dem Ansatz der Störungsrechnung $F = F^{(0)} + \lambda F^{(1)} + \cdots$ erhalten wir aus (4.4) für die erste Näherungsfunktion $F^{(1)}$

$$\Delta\Delta F^{(1)} = 128\frac{(2c)^3}{\cos 2\beta}\frac{\sin 2\varphi}{r^8} \tag{4.23}$$

und die Randbedingungen

$$\sigma_\varphi^{(1)} = \tau_{r\varphi}^{(1)} = 0 \qquad \text{für } \varphi = \pm\beta\,. \tag{4.24}$$

Eine partikuläre Lösung läßt sich sofort angeben. Sie lautet

$$F_P^{(1)} = \frac{(2c)^3}{3\cos 2\beta}\frac{\sin 2\varphi}{r^4}\,.$$

[1] Siehe *H. Kauderer*, a. a. O. S. 468.
[2] Vgl. *L. Föppl*, Drang und Zwang, Bd. III, S. 34, München 1947.

Durch Überlagerung einer Lösung der homogenen Gleichung können die Randbedingungen (4.24) befriedigt werden. So finden wir die erste Näherungslösung in der Form

$$F^{(1)} = \frac{(2c)^3}{3\cos 2\beta}\frac{1}{r^4}(\sin 2\varphi - B\sin 4\varphi - D\sin 6\varphi) \tag{4.25}$$

mit

$$B = \frac{2\sin 8\beta - 4\sin 4\beta}{\sin 10\beta - 5\sin 2\beta},$$

$$D = -\frac{\sin 6\beta - 3\sin 2\beta}{\sin 10\beta - 5\sin 2\beta}.$$

Die Verbesserungen erster Ordnung der Spannungen nehmen hiermit die Werte an

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r^{(1)} &= -\frac{4}{3}\frac{(2c)^3}{\cos 2\beta}\frac{1}{r^6}(2\sin 2\varphi - 5B\sin 4\varphi - 10D\sin 6\varphi),\\
\sigma_\varphi^{(1)} &= \frac{20}{3}\frac{(2c)^3}{\cos 2\beta}\frac{1}{r^6}(\sin 2\varphi - B\sin 4\varphi - D\sin 6\varphi),\\
\tau_{r\varphi}^{(1)} &= \frac{10}{3}\frac{(2c)^3}{\cos 2\beta}\frac{1}{r^6}(\cos 2\varphi - 2B\cos 4\varphi - 3D\cos 6\varphi).
\end{aligned}\right\} \tag{4.26}$$

Somit haben wir die Spannungsverteilung in erster Näherung für den ebenen Keil bestimmt, der durch ein Moment an der Spitze belastet ist. Als Anwendung behandeln wir die Halbebene mit einem Randmoment nach Abb. 8. Mit $\beta = \pi/2$ erhalten wir die Näherungsfunktionen

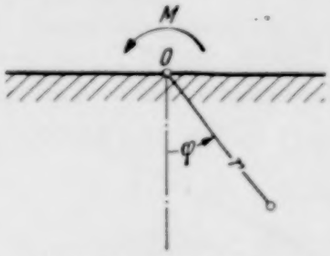


Abb. 8. Halbebene mit einem Randmoment.

$$\left.\begin{aligned}
F^{(0)} &= -\frac{M}{2\pi}(\sin 2\varphi + 2\varphi),\\
F^{(1)} &= -\frac{1}{3}\left(\frac{M}{\pi}\right)^3\left(\sin 2\varphi + \frac{4}{5}\sin 4\varphi + \frac{1}{5}\sin 6\varphi\right),
\end{aligned}\right\} \tag{4.27}$$

woraus die Spannungen nach (4.1) leicht abgeleitet werden können.

Mit Hilfe der Methode der Störungsrechnung können zahlreiche Beispiele behandelt werden, für welche geschlossene Lösungen in der linearen Theorie bekannt sind. (In der Dissertation wurden die Biegung des Kreisringsektors durch eine Einzelkraft, der ebene Keil unter stetiger Rückenlast und die kreisgelochte Scheibe unter Zug untersucht.)

5. Die rotierende Scheibe. Als weitere Anwendung der nichtlinearen Theorie zeigen wir die Berechnung rotierender Scheiben. Sehen wir den Körper in dem früher erläuterten Sinn als eine „Scheibe" an, so genügt es für geringe Scheibendicken, das ebene Problem zu lösen.

Für eine mit der gleichbleibenden Winkelgeschwindigkeit ω umlaufende, achsensymmetrische Scheibe von der Massendichte ϱ gilt, wie das quasistatische Kräftegleichgewicht an irgendeinem Scheibenelement im Abstand r von der Drehachse zeigt [1], die folgende Beziehung zwischen Radialspannung σ_r, Tangentialspannung σ_φ und dortiger Scheibendicke y:

$$\frac{d}{dr}(r\,\sigma_r\,y) - \sigma_\varphi\,y + \varrho\,\omega^2\,r^2\,y = 0. \tag{5.1}$$

Für die radiale Verschiebung u hat man die Spannungs-Dehnungsgleichungen des nichtlinearen Elastizitätsgesetzes (2.7)

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_r &= \frac{du}{dr} = \frac{1}{9K}k(s_0)(\sigma_r + \sigma_\varphi) + \frac{1}{6G}g(t_0^2)(2\sigma_r - \sigma_\varphi),\\
\varepsilon_\varphi &= \frac{u}{r} = \frac{1}{9K}k(s_0)(\sigma_r + \sigma_\varphi) + \frac{1}{6G}g(t_0^2)(2\sigma_\varphi - \sigma_r)
\end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

mit

$$s_0 = \frac{1}{9K}(\sigma_r + \sigma_\varphi), \qquad t_0^2 = \frac{2}{9G^2}(\sigma_r^2 + \sigma_\varphi^2 - \sigma_r\sigma_\varphi). \tag{5.3}$$

Durch Entfernen von u aus den beiden Gleichungen (5.2) ergibt sich die Verträglichkeitsbedingung

$$\frac{1}{9K}r\frac{d}{dr}[k(s_0)(\sigma_r + \sigma_\varphi)] - \frac{1}{6G}r\frac{d}{dr}[g(t_0^2)(\sigma_r - 2\sigma_\varphi)] - \frac{1}{2G}g(t_0^2)(\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0. \tag{5.4}$$

[1] Vgl. *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*, Technische Dynamik, 2. Aufl., Bd. II, S. 5.

Die simultanen Gleichungen (5.1) und (5.4) lösen das ebene Spannungsproblem der rotierenden Scheibe bei gegebener Profilform $y(r)$ vollständig.

a) Die Scheibe gleicher Festigkeit. Wir suchen hier diejenige Profilkurve $y(r)$, bei der das Material an jeder Stelle die gleichen Festwerte für die Hauptspannungen besitzt. Mit dem gemeinsamen Festwert

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = \sigma \tag{5.5}$$

wird aus (5.3)

$$s_0 = \frac{2\sigma}{9K} = \text{konst.}, \qquad t_0^2 = \frac{2\sigma^2}{9G^2} = \text{konst.},$$

und durch diese Werte wird (5.4) befriedigt. Die Gleichung (5.1) gibt dann die Profilkurve wieder

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dr} + \frac{\varrho\,\omega^2}{\sigma} r = 0$$

oder integriert

$$y = y_0\, e^{-\frac{\varrho\,\omega^2}{2\sigma} r^2}. \tag{5.6}$$

Die Integrationskonstante y_0 stellt die Scheibendicke für $r = 0$ dar. Die Lösung ist also von der Form des Elastizitätsgesetzes unabhängig.

Nach (5.2) sind die radiale und tangentiale Dehnung konstant und einander gleich:

$$\varepsilon = \varepsilon_r = \varepsilon_\varphi = k\left(\frac{2\sigma}{9K}\right)\frac{2\sigma}{9K} + g\left(\frac{2\sigma^2}{9G^2}\right)\frac{\sigma}{6G}. \tag{5.7}$$

Die Scheibe gleicher Spannung stellt daher auch eine Scheibe gleicher Dehnung dar. Die radiale Verschiebung

$$u = \left[k\left(\frac{2\sigma}{9K}\right)\frac{2\sigma}{9K} + g\left(\frac{2\sigma^2}{9G^2}\right)\frac{\sigma}{6G}\right] r$$

nimmt gleichmäßig mit dem Radius zu und erreicht am Außenrand den größten Wert.

b) Die Scheibe gleicher Dicke. Da die Scheibendicke y unveränderlich ist, fällt sie aus (5.1) heraus, und man erhält das simultane System

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dr}(r\,\sigma_r) - \sigma_\varphi + \varrho\,\omega^2 r^2 = 0, \\ &\frac{1}{9K} r \frac{d}{dr}[k(s_0)(\sigma_r + \sigma_\varphi)] - \frac{1}{6G} r \frac{d}{dr}[g(t_0^2)(\sigma_r - 2\sigma_\varphi)] - \frac{1}{2G} g(t_0^2)(\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.8}$$

Der ersten dieser Gleichungen genügt man, wenn man mit einer Funktion $Z(r)$

$$\sigma_r = \frac{Z}{r}, \qquad \sigma_\varphi = \frac{dZ}{dr} + \varrho\,\omega^2 r^2 \tag{5.9}$$

setzt. Beschränken wir uns wieder nur auf den Sonderfall (2.10), so ergibt die zweite Gleichung (5.8) für $Z(r)$ die nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\left.\begin{aligned} &[2\lambda r^2 Z'^2 - 2\lambda r Z Z' + \lambda Z^2 + 4\lambda\varrho\,\omega^2 r^4 Z' - 2\lambda\varrho\,\omega^2 r^3 Z + 2\lambda r^2(\varrho\,\omega^2 r^2)^2 + r^2]\, r Z'' \\ &+ [\lambda r Z Z' - \lambda Z^2 + 5\lambda\varrho\,\omega^2 r^4 Z' - 4\lambda\varrho\,\omega^2 r^3 Z + 10\lambda r^2(\varrho\,\omega^2 r^2)^2 + r^2] Z' \\ &+ [2\lambda\varrho\,\omega^2 r^2 Z - 5\lambda r(\varrho\,\omega^2 r^2)^2 - r] Z + 5\lambda r^2(\varrho\,\omega^2 r^2)^3 + (3+\nu)\varrho\,\omega^2 r^4 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5.10}$$

wenn Striche Ableitungen nach r bedeuten und folgende Abkürzungen für die Stoffzahlen eingeführt werden:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{g_2}{9G^3} : \left(\frac{1}{9K} + \frac{1}{3G}\right) = \frac{g_2 K}{(3K+G)G^2}, \\ \nu &= \left(\frac{1}{9K} - \frac{1}{6G}\right) : \left(\frac{1}{9K} + \frac{1}{3G}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{3K-2G}{3K+G}, \end{aligned}\right\} \tag{5.11}$$

wobei ν die *Poisson*sche Zahl der linearen Theorie bezeichnet.

Da λ der einzige Parameter von (5.10) ist, der die Abweichung vom linearen Elastizitätsgesetz enthält, so wird man eine Lösung dieser Gleichung in der Form einer Potenzreihenentwicklung nach positiven Potenzen von λ ansetzen. Eine notwendige Voraussetzung für die Anwendbarkeit des Verfahrens ist, daß der gewählte Parameter auf hinreichend kleine Werte

beschränkt bleibt, um die Konvergenz des Verfahrens zu verbürgen. Wir machen also den Ansatz

$$Z(r) = Z^{(0)}(r) + \lambda Z^{(1)}(r) + \lambda^2 Z^{(2)}(r) + \dots \tag{5.12}$$

Geht man mit (5.12) in (5.10) ein, so erhält man durch Vergleich gleichhoher Potenzen von λ die folgenden Differentialgleichungen:

für $Z^{(0)}(r)$:

$$r^2 Z^{(0)\prime\prime} + r Z^{(0)\prime} - Z^{(0)} + (3+\nu)\varrho\omega^2 r^3 = 0\,, \tag{5.13}$$

für $Z^{(1)}(r)$:

$$\left.\begin{aligned} r^2 Z^{(1)\prime\prime} + r Z^{(1)\prime} - Z^{(1)} &= -5r(\varrho\omega^2 r^2)^3 \\ &- [2r^2 Z^{(0)\prime 2} - 2r Z^{(0)\prime} Z^{(0)} + Z^{(0)2} + 4\varrho\omega^2 r^4 Z^{(0)\prime} \\ &\quad - 2\varrho\omega^2 r^3 Z^{(0)} + 2r^2(\varrho\omega^2 r^2)^2] Z^{(0)\prime\prime} \\ &- \left[Z^{(0)\prime} Z^{(0)} - \frac{1}{r} Z^{(0)2} + 5\varrho\omega^2 r^3 Z^{(0)\prime} - 4\varrho\omega^2 r^2 Z^{(0)} + 10r(\varrho\omega^2 r^2)^2\right] Z^{(0)\prime} \\ &\quad - [2\varrho\omega^2 r Z^{(0)} - 5(\varrho\omega^2 r^2)^2] Z^{(0)}\,, \end{aligned}\right\} \tag{5.14}$$

für $Z^{(2)}(r)$:

$$\left.\begin{aligned} &r^2 Z^{(2)\prime\prime} + r Z^{(2)\prime} - Z^{(2)} \\ &= -[2r^2 Z^{(0)\prime 2} - 2r Z^{(0)\prime} Z^{(0)} + Z^{(0)2} + 4\varrho\omega^2 r^4 Z^{(0)\prime} \\ &\quad - 2\varrho\omega^2 r^3 Z^{(0)} + 2r^2(\varrho\omega^2 r^2)^2] Z^{(1)\prime\prime} \\ &- \left[4r^2 Z^{(0)\prime\prime} Z^{(0)\prime} - 2r Z^{(0)\prime\prime} Z^{(0)} + 4\varrho\omega^2 r^4 Z^{(0)\prime\prime} + 2 Z^{(0)\prime} Z^{(0)} - \frac{1}{r} Z^{(0)2}\right. \\ &\quad \left. + 10\varrho\omega^2 r^3 Z^{(0)\prime} - 4\varrho\omega^2 r^2 Z^{(0)} + 10r(\varrho\omega^2 r^2)^2\right] Z^{(1)\prime} \\ &- \left[-2r Z^{(0)\prime\prime} Z^{(0)\prime} + 2 Z^{(0)\prime\prime} Z^{(0)} - 2\varrho\omega^2 r^3 Z^{(0)\prime\prime} + Z^{(0)\prime 2} - 2\frac{1}{r} Z^{(0)\prime} Z^{(0)}\right. \\ &\quad \left. - 4\varrho\omega^2 r^2 Z^{(0)\prime} + 4\varrho\omega^2 r Z^{(0)} - 5(\varrho\omega^2 r^2)^2\right] Z^{(1)}\,. \end{aligned}\right\} \tag{5.15}$$

Diese Gleichungen sind linear und nichthomogen, ihre Integration ist mit elementaren Mitteln ausführbar.

Die Funktion $Z^{(0)}$ genügt der Differentialgleichung (5.13), die sich für die lineare Theorie mit $\lambda = 0$ ergibt. Die Lösung lautet

$$Z^{(0)} = A_0 r + B_0 \frac{1}{r} - a\varrho\omega^2 r^3 \tag{5.16}$$

mit der Abkürzung

$$a = \frac{3+\nu}{8}\,.$$

Führt man (5.16) in (5.14) ein, so folgt nach kurzer Zwischenrechnung für die Funktion $Z^{(1)}$ die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} &r^2 Z^{(1)\prime\prime} + r Z^{(1)\prime} - Z^{(1)} \\ &= -(5 - 37a + 95a^2 - 84a^3)(\varrho\omega^2)^3 r^7 - (5 - 30a + 44a^2) A_0 (\varrho\omega^2)^2 r^5 \\ &\quad - (3 - 8a) A_0^2 \varrho\omega^2 r^3 + (11 - 50a + 60a^2) B_0 (\varrho\omega^2)^2 r^3 + 2(1 - 4a) A_0 B_0 \varrho\omega^2 r \\ &\quad + (1 - 4a) B_0^2 \varrho\omega^2 \frac{1}{r} + 4 A_0 B_0^2 \frac{1}{r^3} - 12 B_0^3 \frac{1}{r^5}\,. \end{aligned}$$

Die Lösung dieser Gleichung nimmt die Form an

$$\left.\begin{aligned} Z^{(1)} &= A_1 r + B_1 \frac{1}{r} \\ &\quad - (5 - 37a + 95a^2 - 84a^3)(\varrho\omega^2)^3 \frac{r^7}{48} - (5 - 30a + 44a^2) A_0 (\varrho\omega^2)^2 \frac{r^5}{24} \\ &\quad - (3 - 8a) A_0^2 \varrho\omega^2 \frac{r^3}{8} + (11 - 50a + 60a^2) B_0 (\varrho\omega^2)^2 \frac{r^3}{8} \\ &\quad + (1 - 4a) A_0 B_0 \varrho\omega^2 r \ln r - (1 - 4a) B_0^2 \varrho\omega^2 \frac{1}{2r} \ln r + A_0 B_0^2 \frac{1}{2r^3} - B_0^3 \frac{1}{2r^5}\,. \end{aligned}\right\} \tag{5.17}$$

Nunmehr kann die Differentialgleichung für die Funktion $Z^{(2)}$ nach (5.15) angeschrieben werden. Als allgemeine Lösung findet man dann

$$
\begin{aligned}
Z^{(2)} = {} & A_2 r + B_2 \frac{1}{r} \\
& + \frac{1}{5760}\Big\{ -240 A_1 \Big[(5 - 30a + 44a^2)(\varrho\omega^2)^2 r^5 + 6(3 - 8a) A_0 \varrho \omega^2 r^3 + 12 B_0^2 \frac{1}{r^3} \\
& - 24(1 - 4a) B_0 \varrho \omega^2 r \ln r \Big] + 720 B_1 \Big[(11 - 50a + 60a^2)(\varrho\omega^2)^2 r^3 \\
& + 8 A_0 B_0 \frac{1}{r^3} - 12 B_0^2 \frac{1}{r^5} + 8(1 - 4a) A_0 \varrho \omega^2 r \ln r - 8(1 - 4a) B_0 \varrho \omega^2 \frac{1}{r} \ln r \Big] \\
& + (745 - 9263a + 46805a^2 - 120026a^3 + 156100a^4 - 82320a^5)(\varrho\omega^2)^5 r^{11} \\
& + 3(740 - 7971a + 32401a^2 - 58992a^3 + 40608a^4) A_0 (\varrho\omega^2)^4 r^9 \\
& - 5(1946 - 18885 + 69831a^2 - 116480a^3 + 73920a^4) B_0 (\varrho\omega^2)^4 r^7 \\
& + 5(803 - 6626a + 18428a^2 - 17216a^3) A_0^2 (\varrho\omega^2)^3 r^7 \\
& - 20(1069 - 8464a + 22378a^2 - 19864a^3) A_0 B_0 (\varrho\omega^2)^3 r^5 + 60(65 - 372a \\
& + 528a^2) A_0^3 (\varrho\omega^2)^2 r^5 + 30(2087 - 14884a + 36122a^2 - 29880a^3) B_0^2 (\varrho\omega^2)^3 r^3 \\
& - 60(479 - 2532a + 3440a^2) A_0^2 B_0 (\varrho\omega^2)^2 r^3 + 720(3 - 8a) A_0^4 \varrho\omega^2 r^3 \\
& + 720(54 - 160a) A_0 B_0^3 \varrho\omega^2 \frac{1}{r^3} - 2880 A_0^3 B_0^2 \frac{1}{r^3} - 120(161 - 404a) B_0^4 \varrho\omega^2 \frac{1}{r^5} \\
& + 6720 A_0^2 B_0^3 \frac{1}{r^5} - 11280 A_0 B_0^4 \frac{1}{r^7} + 8496 B_0^5 \frac{1}{r^9} \\
& - 240(5 - 50a + 164a^2 - 176a^3) A_0 B_0 (\varrho\omega^2)^3 r^5 \ln r \\
& - 360(11 - 94a + 260a^2 - 240a^3) B_0^2 (\varrho\omega^2)^3 r^3 \ln r \\
& - 720(6 - 40a + 64a^2) A_0^2 B_0 (\varrho\omega^2)^2 r^3 \ln r \\
& + 1440(71 - 384a + 520a^2) A_0 B_0^2 (\varrho\omega^2)^2 r \ln r \\
& - 2880(5 - 16a) A_0^3 B_0 \varrho\omega^2 r \ln r + 1440(11 - 32a) A_0^2 B_0^2 \varrho\omega^2 \frac{1}{r} \ln r \\
& - 1440(27 - 148a + 200a^2) B_0^3 (\varrho\omega^2)^2 \frac{1}{r} \ln r + 4320(1 - 4a) B_0^4 \varrho\omega^2 \frac{1}{r^5} \ln r \\
& + 1440(1 - 4a)^2 A_0 B_0^2 (\varrho\omega^2)^2 r (\ln r)^2 + 1440(1 - 4a)^2 B_0^3 (\varrho\omega^2)^2 \frac{1}{r} (\ln r)^2 \Big\} .
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

Nachdem die Funktionen $Z^{(0)}(r)$, $Z^{(1)}(r)$ und $Z^{(2)}(r)$ bekannt sind, können die radiale und tangentiale Spannung leicht ermittelt werden. Aus der zweiten Näherungslösung

$$Z^{(II)} = Z^{(0)} + \lambda Z^{(1)} + \lambda^2 Z^{(2)}$$

errechnet man die Spannungen gemäß (5.9) zu

$$
\begin{aligned}
\sigma_r^{(II)} &= \frac{1}{r} Z^{(II)} = \frac{1}{r}\left(Z^{(0)} + \lambda Z^{(1)} + \lambda^2 Z^{(2)}\right), \\
\sigma_\varphi^{(II)} &= \frac{dZ^{(II)}}{dr} + \varrho\omega^2 r^2 = \frac{dZ^{(0)}}{dr} + \lambda \frac{dZ^{(1)}}{dr} + \lambda^2 \frac{dZ^{(2)}}{dr^2} + \varrho\omega^2 r^2 .
\end{aligned}
\tag{5.19}
$$

Die in $Z^{(II)}(r)$ auftretenden Integrationskonstanten berechnet man aus den vorgegebenen Randbedingungen der Aufgabe. Wenn die Radialspannung am Innenrand $r = r_0$ mit dem Wert $\sigma_r = \sigma_{r_0}$ und am Außenrand $r = r_a$ mit $\sigma_r = \sigma_{r_a}$ vorgeschrieben ist, so unterwerfen wir die Funktionen $Z^{(0)}(r)$, $Z^{(1)}(r)$ und $Z^{(2)}(r)$ den Randbedingungen

$$
\begin{aligned}
\sigma_r^{(0)} &= \sigma_{r_0} \quad \text{für} \quad r = r_0 , \\
\sigma_r^{(0)} &= \sigma_{r_a} \quad \text{für} \quad r = r_a , \\
\sigma_r^{(1)} &= \sigma_r^{(2)} = 0 \quad \text{für} \quad r = r_0 \quad \text{und} \quad r = r_a ,
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

woraus die Integrationskonstanten A_0, B_0; A_1, B_1; bzw. A_2, B_2 eindeutig bestimmt werden.

Die Durchführung dieser elementaren Rechnung soll aber hier wegen der ziemlich umständlichen Formeln nicht angegeben werden.

6. Die Torsion des Umdrehungskörpers. Wir führen in bezug auf die Achse des Umdrehungskörpers Zylinderkoordinaten z, r, φ ein, wobei wegen der vorausgesetzten Drehsymmetrie sämtliche Spannungen und Verzerrungen vom Winkel φ unabhängig sind. Werden die Span-

nungskomponenten an der Stelle z, r, φ in diesen Koordinaten mit σ_z, σ_r, σ_φ, $\tau_{r\varphi}$, $\tau_{\varphi z}$, τ_{zr} und die entsprechenden Verzerrungskomponenten mit ε_z, ε_r, ε_φ, $\psi_{r\varphi}$, $\psi_{\varphi z}$, ψ_{zr} bezeichnet, so sind für das reine Torsionsproblem nur die Größen $\tau_{r\varphi}$, $\tau_{\varphi z}$; bzw. $\psi_{r\varphi}$, $\psi_{\varphi z}$ beizubehalten und alle anderen gleich Null zu setzen [1]:

$$\sigma_z = \sigma_r = \sigma_\varphi = \tau_{zr} = 0 . \tag{6.1}$$

Dann bleibt als einzige Gleichgewichtsbedingung übrig

$$\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2\,\tau_{r\varphi}}{r} = 0 , \tag{6.2}$$

wobei die Volumkräfte vernachlässigt werden. Wenn t_φ die Oberflächenspannung in tangentialer Richtung und n die Richtung der nach außen gerichteten Oberflächennormalen bezeichnet, so reduzieren sich die Randbedingungen auf die Beziehung

$$\tau_{r\varphi} \cos(r, n) + \tau_{\varphi z} \cos(z, n) = t_\varphi . \tag{6.3}$$

Die beiden Winkeländerungen $\psi_{r\varphi}$ und $\psi_{\varphi z}$ lassen sich durch die Verschiebungskomponente v in tangentialer Richtung ausdrücken:

$$\psi_{r\varphi} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} , \qquad \psi_{\varphi z} = \frac{\partial v}{\partial z} . \tag{6.4}$$

Mit der Hilfsgröße $\vartheta = v/r$ gehen die Gleichungen (6.4) über in

$$\psi_{\varphi r} = r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} , \qquad \psi_{\varphi z} = r \frac{\partial \vartheta}{\partial z} , \tag{6.5}$$

woraus die Verträglichkeitsbedingung folgt

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\,\psi_{\varphi z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\,\psi_{\varphi r}\right) = 0 . \tag{6.6}$$

Für die Aufstellung der Gleichungen braucht man noch den Zusammenhang zwischen den Spannungs- und den Verzerrungsgrößen. Das nichtlineare Elastizitätsgesetz liefert nach (2.4) bzw. (2.7) die Beziehungen

$$\tau_{\varphi r} = G\,\gamma(\psi_0^2)\,\psi_{\varphi r} , \qquad \tau_{\varphi z} = G\,\gamma(\psi_0^2)\,\psi_{\varphi z} \tag{6.7}$$

mit

$$\psi_0^2 = \frac{2}{3}\,(\psi_{\varphi r}^2 + \psi_{\varphi z}^2)$$

oder

$$\psi_{\varphi r} = \frac{1}{G}\,g(t_0^2)\,\tau_{\varphi r} , \qquad \psi_{\varphi z} = \frac{1}{G}\,g(t_0^2)\,\tau_{\varphi z} \tag{6.8}$$

mit

$$t_0^2 = \frac{2}{3\,G^2}\,(\tau_{\varphi r}^2 + \tau_{\varphi z}^2) .$$

Bei dem hier definierten Problem ergeben sich nun zwei verschiedene Formulierungen für die Integration, von denen die eine für vorgegebene Randspannungen und die andere für vorgegebene Oberflächenverschiebungen zur Lösung geeignet erscheint.

a) Vorgeschriebene Oberflächenspannungen. Die Gleichung (6.2) läßt sich in der Form

$$\frac{\partial}{\partial r}\,(r^2 \tau_{\varphi r}) + \frac{\partial}{\partial z}\,(r^2 \tau_{\varphi z}) = 0 \tag{6.9}$$

schreiben. Diese Gleichung wird identisch befriedigt, wenn die Schubspannungen $\tau_{\varphi r}$ und $\tau_{\varphi z}$ aus einer Spannungsfunktion $\Phi(r, z)$ durch den Ansatz

$$r^2 \tau_{\varphi r} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} , \qquad r^2 \tau_{\varphi z} = +\frac{\partial \Phi}{\partial r} \tag{6.10}$$

hergeleitet werden. Wegen (6.6) und (6.8) genügt Φ der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[g(t_0^2)\,\frac{1}{r^3}\,\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[g(t_0^2)\,\frac{1}{r^3}\,\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right] = 0 \tag{6.11}$$

[1] Vgl. *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*, Technische Dynamik, 2. Aufl. Bd. I, S. 125.

mit

$$t_0^2 = \frac{2}{3\,G^2}\frac{1}{r^4}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2\right].$$

Führt man die Differentiationen aus, so ergibt sich mit der Abkürzung $g'(t_0^2) \equiv d\,g(t_0^2)/d(t_0^2)$ folgende nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Spannungsfunktion $\Phi(r, z)$:

$$\left.\begin{aligned} & g(t_0^2)\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{3}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right) \\ & + g'(t_0^2)\,\frac{2}{3\,G^2}\,\frac{2}{r^4}\left\{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + 2\,\frac{\partial \Phi}{\partial r}\,\frac{\partial \Phi}{\partial z}\,\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r\,\partial z} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{2}{r}\,\frac{\partial \Phi}{\partial r}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2\right]\right\} = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{6.12}$$

Die Randbedingung (6.3) geht mit (6.10) über in

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial \Phi}{\partial s} = t_\varphi \qquad \text{am Rand,} \tag{6.13}$$

wobei s die Bogenlänge der Meridiankurve bedeutet.

b) Vorgeschriebene Oberflächenverschiebungen. Setzt man (6.5) und (6.7) in (6.9) ein, so folgt für ϑ die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\gamma(\psi_0^2)\,r^3\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\gamma(\psi_0^2)\,r^3\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right] = 0 \tag{6.14}$$

mit

$$\psi_0^2 = \frac{2}{3}\,r^2\left[\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)^2\right].$$

Nach Ausführung der Differentiationen entsteht die nichtlineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\left.\begin{aligned} & \gamma(\psi_0^2)\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{3}{r}\frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}\right) \\ & + \frac{2}{3}\,\gamma'(\psi_0^2)\cdot 2\,r^2\left\{\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right)^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + 2\,\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\,\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\,\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r\,\partial z} + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\left[\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)^2\right]\right\} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{6.15}$$

mit der Abkürzung

$$\gamma'(\psi_0^2) \equiv \frac{d\gamma(\psi_0^2)}{d(\psi_0^2)}\,.$$

Diese Gleichung ist dann für die Integration heranzuziehen, wenn der Oberflächenwert der Verschiebung v gegeben ist. Der Wert der Funktion ϑ an der Oberfläche des Rotationskörpers ist dann ohne weiteres bekannt, und man kann (6.15) bei gegebenen Randwerten von ϑ integrieren.

Als Beispiel behandeln wir die kegelförmige Welle Abb. 9. Den Koordinatenursprung legen wir in die zu dem kegelförmigen Wellenstück gehörende Kegelspitze und bezeichnen mit α den halben Öffnungswinkel des Kegels. Die Welle werde an den Endquerschnitten ($z = l_1$ und $z = l_2$) durch Torsionsmomente W verdreht, während am Mantel keine äußeren Kräfte angreifen.

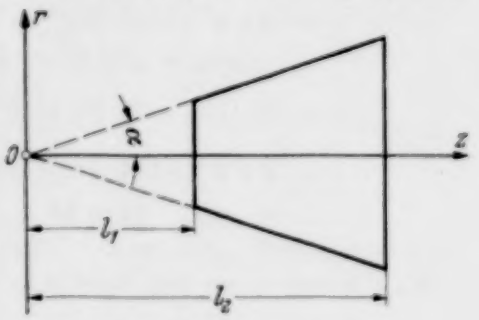


Abb. 9. Kegelförmige Welle.

Unsere Aufgabe besteht nun darin, eine Lösung der quasilinearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung (6.12) zu finden, die auf dem Rand des Meridianschnittes einen festen Wert besitzt. Da diese Aufgabe infolge der komplizierten Form dieser Differentialgleichung außerordentlich schwierig ist, soll hier eine Näherungsmethode für den Sonderfall entwickelt werden, daß die Schubfunktion $g(t_0^2)$ in der Form $g(t_0^2) = 1 + g_2\,t_0^2$ darstellbar ist. Mit dieser Annahme vereinfacht sich (6.12) zu

$$\left.\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{3}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right) + \varepsilon\,\frac{1}{r^4}\left\{\left[3\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2\right]\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{7}{r}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2\right]\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right. \\ & \left. + 4\,\frac{\partial \Phi}{\partial r}\,\frac{\partial \Phi}{\partial z}\,\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r\,\partial z} + \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)^2 + 3\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2\right]\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right\} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{6.16}$$

mit der Stoffzahl

$$\varepsilon = \frac{2\,g_2}{3\,G^2}\,. \tag{6.17}$$

Als Näherungsverfahren zur Lösung der Randwertaufgabe wenden wir die Fehlerquadratmethode an. Für unser Problem wählen wir den nur zweigliedrigen Ansatz

$$\bar{\Phi} = \varphi_0 + a\,\varphi_1\,. \tag{6.18}$$

Die Funktion

$$\varphi_0 = c\,\frac{r^4}{z^4}\left(1 - \frac{5}{3}\,\frac{r^2}{z^2} + \frac{35}{16}\,\frac{r^4}{z^4}\right) \tag{6.19}$$

stellt die ersten drei Glieder der Potenzreihenentwicklung für die bekannte Lösung [1] der linearen Theorie ($\varepsilon = 0$)

$$\Phi^* = -\,4\,c\left[\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} - \frac{1}{3}\left(\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\right)^3 - \frac{2}{3}\right]$$

dar, wobei c eine noch offene Konstante bedeutet. Die Funktion φ_0 erfüllt daher die Randbedingung $\bar{\Phi} =$ konst. am Rand. Von der Funktion φ_1 verlangen wir, daß sie am Rand des Meridianschnittes für $r = \pm\, k\,z$ verschwindet ($k \equiv \operatorname{tg}\alpha$ gesetzt), für $r = 0$ keine Spannungskomponenten liefert und die aus ihr herzuleitenden Schubspannungen umgekehrt proportional zur neunten Potenz des Abstandes vom Koordinatenursprung sind. Die einfachste algebraische Funktion, die allen Forderungen genügt, ist

$$\varphi_1 = \frac{r^4}{z^{12}}\,(r^2 - k^2\,z^2)\,. \tag{6.20}$$

Der Ansatz (6.18) befriedigt somit für beliebige Werte des Parameters a die Randbedingungen des Problems.

Setzt man die Näherungsfunktion (6.18) in (6.16) ein, so erhält man auf der rechten Seite eine Fehlerfunktion

$$\begin{aligned}
e(r,z\,;a) = {} & \frac{315}{2}\,c\,\frac{r^8}{z^{10}} + 2\,a(78\,r^4 + 6\,r^2\,z^2 - 55\,k^2\,r^2\,z^2)\,\frac{r^2}{z^{14}} \\
& + \frac{1}{8}\,\varepsilon\,c^3(945\,r^6 + 70\,r^4\,z^2 - 40\,r^2\,z^4 + 16\,z^6)\,(35\,r^4 - 20\,r^2\,z^2 + 8\,z^4)^2\,(r^2+z^2)\,\frac{r^4}{z^{28}} \\
& + \frac{3}{2}\,\varepsilon\,a\,c^2\,[227850\,r^{14} - 875(18 + 203\,k^2)\,r^{12}\,z^2 - 15\,(2372 - 2065\,k^2)\,r^{10}\,z^2 \\
& + 1500(36 + 11\,k^2)\,r^8\,z^6 - 128(81 + 295\,k^2)\,r^6\,z^8 + 384(4 + 25\,k^2)\,r^4\,z^{10} \\
& + 192(4 - 11\,k^2)\,r^2\,z^{12} - 256\,k^2\,z^{14}]\,\frac{r^4}{z^{32}} \\
& + 6\,\varepsilon\,a^2\,c\,[44100\,r^{12} + 45(81 - 1540\,k^2)\,r^{10}\,z^2 - (2022 - 30\,k^2 - 27125\,k^4)\,r^8\,z^4 \\
& + 4(894 + 390\,k^2 - 545\,k^4)\,r^6\,z^6 + 24(18 - 214\,k^2 + 5\,k^4)\,r^4\,z^8 \\
& - 32(12 - 55\,k^2)\,k^2\,r^2\,z^{10} + 64\,k^4\,z^{12}]\,\frac{r^4}{z^{36}} \\
& + 8\,\varepsilon\,a^3\,[8424\,r^{10} + 54(57 - 370\,k^2)\,r^8\,z^2 + 9(24 - 679\,k^2 + 1750\,k^4)\,r^6\,z^4 \\
& - 3(108 - 1314\,k^2 + 1375\,k^4)\,k^2\,r^4\,z^6 + 4(36 - 205\,k^2)\,k^4\,r^2\,z^8 - 16\,k^6\,z^{10}]\,\frac{r^4}{z^{40}}\,.
\end{aligned}$$

Man bildet dann das über den ganzen Bereich erstreckte Flächenintegral

$$\begin{aligned}
I = {} & 2\int_{z=l_1}^{z=l_2}\int_{0}^{r=k\,z} e^2(r\,,z\,;a)\,dr\,dz \\
= {} & K_{02}\,c^2 + K_{11}\,a\,c + K_{20}\,a^2 + \varepsilon\,(K_{04}\,c^4 + K_{13}\,a\,c^3 + K_{22}\,a^2\,c^2 + K_{31}\,a^3\,c + K_{40}\,a^4) \\
& + \varepsilon^2(K_{06}\,c^6 + K_{15}\,a\,c^5 + K_{24}\,a^2\,c^4 + K_{33}\,a^3\,c^3 + K_{42}\,a^4\,c^2 + K_{51}\,a^5\,c + K_{60}\,a^6)
\end{aligned}$$

mit den Abkürzungen

$$K_{11} = \frac{315}{2}\,(0{,}46154 + 0{,}96923\,k^2)\,k^{13}(l_1^{-8} - l_2^{-8})\,,$$

$$K_{20} = \frac{4}{7}\,(4 + 11{,}758\,k^2 + 24{,}111\,k^4)\,k^9(l_1^{-14} - l_2^{-14})\,,$$

[1] Vgl. S. *Timoshenko*, a. a. O. S. 280.

$$K_{13}=\frac{1}{14}(682{,}67-2627{,}23\,k^2+4864\,k^4+57935\,k^6-102879\,k^8+49026\,k^{10}+907858\,k^{12}-1108550\,k^{14}+897126\,k^{16}+2058000\,k^{18})\,k^9(l_1^{-14}-l_2^{-14}),$$

$$K_{22}=\frac{3}{5}(248{,}24+74{,}09\,k^2-339{,}69\,k^4+5196\,k^6+7847\,k^8-11767\,k^{10}+36140\,k^{12}+42287\,k^{14})\,k^{11}(l_1^{-20}-l_2^{-20}),$$

$$K_{31}=\frac{24}{13}(32{,}597+117{,}36\,k^2+43{,}30\,k^4+155{,}79\,k^6+1519{,}98\,k^8+978{,}62\,k^{10})\,k^{13}(l_1^{-26}-l_2^{-26}),$$

$$K_{40}=2(4{,}740+27{,}41\,k^2+51{,}36\,k^4+38{,}52\,k^6)\,k^{15}(l_1^{-32}-l_2^{-32}),$$

$$K_{15}=\frac{3}{80}(42366{,}71-313931{,}19\,k^2+1234597\,k^4-505817\,k^6-9636316\,k^8+41894457\,k^{10}-48891039\,k^{12}-78320540\,k^{14}+477048747\,k^{16}-717522332\,k^{18}+350142547\,k^{20}+984249247\,k^{22}-1174753298\,k^{24}+445482838\,k^{26}+1205819263\,k^{28})\,k^{11}(l_1^{-20}-l_2^{-20}),$$

$$K_{24}=\frac{3}{52}(61844{,}19-224151{,}46\,k^2+394517\,k^4+2088566\,k^6-7033375\,k^8+10046445\,k^{10}+28978336\,k^{12}-84990584\,k^{14}+124763998\,k^{16}+65607923\,k^{18}-158227195\,k^{20}+186611076\,k^{22}+217980398\,k^{24})\,k^{13}(l_1^{-26}-l_2^{-26}),$$

$$K_{33}=\frac{1}{8}(23402{,}90-18134{,}95\,k^2-49099{,}89\,k^4+768419\,k^6-155666\,k^8-1541618\,k^{10}+8917412\,k^{12}-1121964\,k^{14}-3570448\,k^{16}+21010281\,k^{18}+15083696\,k^{20})\,k^{15}(l_1^{-32}-l_2^{-32}),$$

$$K_{42}=\frac{12}{19}(2041{,}71+3735{,}88\,k^2-4815{,}36\,k^4+34253\,k^6+100516\,k^8-44678\,k^{10}+151320\,k^{12}+486479\,k^{14}+259262\,k^{16})\,k^{17}(l_1^{-38}-l_2^{-38}),$$

$$K_{51}=\frac{48}{11}(64{,}165+289{,}46\,k^2+278{,}20\,k^4+322{,}73\,k^6+2798\,k^8+4256\,k^{10}+1593\,k^{12})\,k^{19}(l_1^{-44}-l_2^{-44}),$$

$$K_{60}=\frac{64}{25}(9{,}880+68{,}76\,k^2+170{,}98\,k^4+170{,}82\,k^6+86{,}59\,k^8)\,k^{21}(l_1^{-50}-l_2^{-50}).$$

Nun verlangt man, daß das mittlere Fehlerquadrat I möglichst klein wird. Die notwendige Bedingung für einen Kleinstwert $\partial I/\partial a=0$ führt auf die Bestimmungsgleichung für den Freiwert a

$$\left.\begin{aligned}&6\,\varepsilon^2 K_{60}\,a^5+5\,\varepsilon^2 c\,K_{51}\,a^4+4\,\varepsilon(K_{40}+\varepsilon\,c^2\,K_{42})\,a^3\\&+3\,\varepsilon\,c(K^{31}+\varepsilon\,c^2\,K_{33})\,a^2+2(K_{20}+\varepsilon\,c^2\,K_{22}+\varepsilon^2 c^4\,K_{24})\,a\\&+c(K_{11}+\varepsilon\,c^2\,K_{13}+\varepsilon^2 c^4\,K_{15})=0.\end{aligned}\right\}\qquad(6.21)$$

Die Konstante c bestimmt sich aus der Forderung, daß das Moment der im Wellenquerschnitt wirkenden Schubkräfte das vorgeschriebene Torsionsmoment W ergeben muß:

$$W=2\pi\int\tau_{\varphi z}\,r^2\,dr=2\pi\,c\,k^4\left(1-\frac{5}{3}\,k^2+\frac{35}{16}\,k^4\right),$$

woraus

$$c=\frac{1}{k^4\left(1-\frac{5}{3}\,k^2+\frac{35}{16}\,k^4\right)}\,\frac{M}{2\pi}\qquad(6.22)$$

folgt.

Die aus dem Ansatz (6.18) heranleitenden Schubspannungen $\tau_{\varphi r}$ und $\tau_{\varphi z}$ berechnen sich schließlich nach (6.10) zu

$$\left.\begin{aligned}\tau_{\varphi r}&=c\frac{r^2}{z^5}\left(4-10\frac{r^2}{z^2}+\frac{35}{2}\frac{r^4}{z^4}\right)+2\,a\frac{r^2}{z^{13}}(6\,r^2-5\,k^2\,z^2),\\\tau_{\varphi z}&=c\frac{r}{z^4}\left(4-10\frac{r^2}{z^2}+\frac{35}{2}\frac{r^4}{z^4}\right)+2\,a\frac{r}{z^{12}}(3\,r^2-2\,k^2\,z^2).\end{aligned}\right\}\qquad(6.23)$$

Zahlenbeispiel: Kreiskegel mit $l_1=20$ cm, $l_2=50$ cm; halber Öffnungswinkel $\operatorname{tg}\alpha=k=0{,}2$. Torsionsmoment $W=103\,880$ cm kg. Werkstoff: Kupfer mit $G=0{,}47\cdot10^6$ kg/cm², $g_2=7{,}26\cdot10^6$; also nach (6.17) $\varepsilon=21{,}9\cdot10^{-6}$ cm⁴/kg². Nach (6.22) erhalten wir $c=11{,}03\cdot10^6$ (cmkg). Die Bestimmungsgleichung für den Parameter a lautet nach (6.21)

$$177\cdot10^{-60}\,a^5+262\cdot10^{-64}\,a^4+1617\cdot10^{-48}\,a^3+4235\cdot10^{-32}\,a^2+5525\cdot10^{-16}\,a+1860=0.$$

Die Auflösung ergibt $a=-0{,}4857\cdot10^{16}$ (cm⁷ kg).

Wir ermitteln die Schubspannung $\tau_{\varphi z}$ im Längsschnitt am Rand des Endquerschnittes ($r = 4$ cm, $z = 20$ cm). Aus (6.23) erhalten wir $\tau_{\varphi z} = 848$ kg/cm². Die lineare Theorie ($\varepsilon = 0$) liefert hier den Wert $\tau^*_{\varphi z} = 1000$ kg/cm². Der Wert der Schubspannung $\tau_{\varphi z}$ am Rand des Endquerschnitts verringert sich demnach gegenüber dem Wert der linearen Theorie bei gleichem Torsionsmoment um 15,2 %.

7. Schlußbemerkung. Soweit man aus den Zahlenbeispielen allgemeine Schlüsse ziehen darf, kann man zweierlei folgern: einmal, daß der Einfluß der Nichtlinearität des Elastizitätsgesetzes auf die Spannungen dann besonders groß ist, wenn das Problem nur von der Schubfunktion abhängt (Ziff. 6); und außerdem, daß schon eine verhältnismäßig kleine Abweichung des Elastizitätsgesetzes von der Linearität die Spannungsspitzen erheblich abzubauen vermag (Ziff. 4b), sodaß also der in der technischen Praxis oft zu beobachtende Abbau der Spannungsspitzen recht wohl auf geringfügige Abweichungen vom *Hooke*schen Gesetz zurückzuführen wäre. Dies soll durch weitere Rechnungen noch nachgeprüft werden.

(Eingegangen am 17. Juli 1953.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *F. Jindra*, Stuttgart-O, Gerokstr. 70.

Bemerkungen

zu der Arbeit des Herrn K. Yamada „Vibration of turbine disc in its plane". Proceedings of the Second Japan National Congress for Applied Mechanics 1952, S. 343.

Von **R. Grammel.**

In der angeführten Arbeit nimmt Herr *Yamada* ein 1935 von mir angeschnittenes Problem erfreulicherweise von neuem auf, aber leider enthalten seine Ausgangsgleichungen einen wesentlichen Fehler. Herr *Yamada* schreibt die Bewegungsgleichungen für die radiale und azimutale Verschiebung ϱ und $r\psi$ eines Scheibenelements $dm = (\gamma/g) y\, r\, dr\, d\varphi$, an welchem die Spannungskräfte

$$dP = d(y\, r\, \sigma_r)\, d\varphi - y\, \sigma_t\, dr\, d\varphi\,,$$

$$dQ = d(y\, r\, \tau)\, d\varphi + y\tau\, dr\, d\varphi$$

angreifen (wobei γ/g, y, r, σ_r, σ_t, τ und $d\varphi$ die übliche Bedeutung haben), bei der mittleren Drehgeschwindigkeit ω der Scheibe in der folgenden Form (mit Verbesserung einiger kleiner offensichtlicher Druckfehler):

$$\ddot{\varrho}\, dm = dP + r\omega^2\, dm + \underline{2\, r\, \omega\, \dot{\psi}\, dm}\,, \tag{1}$$

$$r\ddot{\psi}\, dm = dQ - 2\, \omega\, \dot{\varrho}\, dm + \underline{\underline{r\, \omega^2\, \psi\, dm}}\,. \tag{2}$$

Die richtigen und (im Rahmen der Elastizitätstheorie der kleinen Verformungen) exakten Gleichungen aber lauten, wie ich seinerzeit angegeben habe[1],

$$\ddot{\varrho}\, dm = dP + r(\omega + \dot{\psi})^2\, dm \equiv dP + r\, \omega^2\, dm + \underline{2\, r\, \omega\, \dot{\psi}\, dm} + [r\, \dot{\psi}^2\, dm]\,, \tag{3}$$

$$r\, \ddot{\psi}\, dm = dQ - 2(\omega + \dot{\psi})\, \dot{\varrho}\, dm \equiv dQ - 2\, \omega\, \dot{\varrho}\, dm - [2\, \dot{\psi}\, \dot{\varrho}\, dm]\,. \tag{4}$$

Die Richtigkeit meiner Gleichungen (3) und (4) sieht man rasch ein, wenn man sich entweder auf ein Bezugssystem bezieht, das die (veränderliche) Drehgeschwindigkeit $\omega + \dot{\psi}$ besitzt und in welchem als d'Alembertsche Kräfte auftreten: die Fliehkraft $r(\omega + \dot{\psi})^2\, dm$ radial, sowie die Corioliskraft $-2(\omega + \dot{\psi})\, \dot{\varrho}\, dm$ azimutal und endlich die azimutale Trägheitskraft $-r\, \ddot{\psi}\, dm$; oder noch schneller, wenn man sich daran erinnert, daß (3) und (4) die bekannten klassischen Gleichungen der Zentralbewegung oder die Bewegungsgleichungen in Polarkoordinaten sind[2]. [Streng genommen müßte man überall in den Gleichungen (1) bis (4) genauer $\bar{r} = r + \varrho$ statt r schreiben. Man schätzt aber ab, daß dies (wie schon in der statischen Spannungsberechnung, die man ebenfalls mit r statt $\bar{r}$ durchzuführen pflegt) die Ergebnisse, also hier die Frequenzen, bei den üblichen Baustoffen und Drehgeschwindigkeiten nur um einen Faktor $(1 + \alpha)$ verbessern würde, wo α höchstens von der Größenordnung 10^{-4} bis 10^{-5} wäre. Dies kann man ganz leicht schon an einem rotierenden Stab abschätzen.]

Herr *Yamada* beschränkt sich (allerdings ohne dies zu sagen) auf „kleine Schwingungen", so daß man die in (3) und (4) eingeklammerten letzten Glieder weglassen darf, womit wenigstens die *Yamada*sche Gleichung (1) für „kleine" Schwingungen richtig wird. Nicht verständlich sind aber seine beiden Behauptungen, daß ich selbst in der Gleichung (3) die „Corioliskraft" [also das letzte Glied in (1)] und in der Gleichung (4) ein Fliehkraftglied [also das letzte Glied in (2)] „vernachlässigt" hätte. Beide Behauptungen sind unrichtig.

Daß die erste Behauptung glattweg falsch ist, ersieht man an den einfach unterstrichenen Coriolisgliedern in (1) und (3). Diese unsinnige Behauptung ist umso erstaunlicher, als Herr *Yamada* lange Teile meiner Rechnung von 1935 wörtlich übernimmt, in denen gerade dieses Coriolisglied immer wieder explizit erscheint, das zusammen mit dem Coriolisglied $-2\, \omega\, \dot{\varrho}\, dm$ der Gleichung (4) das eigentliche Kernstück meiner ganzen Rechnung und ihrer

---

[1] *R. Grammel*, Ing.-Arch. 6 (1935) S. 258, Gl. (1).

[2] Vgl. z. B. *E. Meissner* u. *H. Ziegler*, Mechanik Bd. 2, S. 164, Basel 1947.

Ergebnisse bildete. [Freilich tritt im System mit der Drehgeschwindigkeit $\omega + \dot{\psi}$ keine Corioliskraft auf, aber ein zusätzliches Fliehkraftglied mit $2\,r\,\omega\,\dot{\psi}\,dm$, und es ist bekannt, daß eben dieses Glied in einem System mit der Drehgeschwindigkeit ω (wie es offenbar Herrn *Yamada* vorschwebt) das Coriolisglied ist.]

Die zweite Behauptung von Herrn *Yamada* ist deswegen falsch, weil es in der Gleichung für $\ddot{\psi}$ gar kein Fliehkraftglied gibt [weder in einem System ω noch in einem System $\omega + \dot{\psi}$]. Das doppelt unterstrichene Glied in der *Yamada*schen Gleichung (2), das in meiner Gleichung (4) in der Tat nicht vorkommt, muß bei ihm weggelassen werden. Daß dieses Glied unmöglich ist, erkennt man beim Übergang zum starren Körper; dabei wird $\varrho \equiv 0$ und $\tau \equiv 0$, und die *Yamada*sche Gleichung (2) nimmt die Gestalt $\ddot{\psi} = \omega^2 \psi$ an, mit Lösungen von der Form $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0 \mathfrak{Cof}\,\omega\,t$, welche besagen würden, daß eine starre Scheibe die mit einer Drehgeschwindigkeit $\omega \neq 0$ umläuft, beim kleinsten zusätzlichen Drehstoß $\dot{\psi}_0$ „infolge der Fliehkraft" immer rascher und rascher umlaufen müßte — ein verblüffend einfaches Perpetuum mobile!

Die allgemeine Lösung des Systems (3), (4) bereitet wegen der Verkoppelung der beiden Gleichungen durch die Drehgeschwindigkeit der Scheibe erhebliche Schwierigkeiten, sodaß bisher explizit nur asymptotische Lösungen gelungen sind[1], welche Herr *Yamada*, durch sein falsches Fliehkraftglied entstellt, wiederholt.

Glücklicherweise ist jene Verkopplung bei Dampfturbinenscheiben nur schwach[2], sodaß man wohl hinreichend genaue Lösungen erhält, wenn man die radialen und die azimutalen Schwingungen je für sich an der nichtrotierenden Scheibe berechnet. Herr *Yamada* versucht diese Rechnung für ein spezielles (hyperbolisches) Scheibenprofil, obwohl er aus dem von ihm zitierten Band des „Ingenieur-Archivs" wissen mußte, daß ich sie schon längst nicht nur für dieses spezielle, sondern für beliebige Profile und beliebige Randbedingungen vollständig erledigt habe[3].

(Eingegangen am 4. März 1954.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr. *R. Grammel*, Stuttgart-N, Robert-Bosch-Str. 101.

---

[1] *R. Grammel*, a. a. O. S. 259.

[2] *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, Technische Dynamik Bd. 2, S. 35, 2. Aufl. Berlin 1953 (oder S. 655 der 1. Aufl. Berlin 1939).

[3] *R. Grammel*, Ing.-Arch. 6 (1935) S. 442; Z. angew. Math. Mech. 5 (1925) S. 193.

Der Kreisel. Seine Theorie und seine Anwendungen. Von Dr. **R. Grammel**, o. Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart. Zweite, neubearbeitete Auflage. In zwei Bänden.

Erster Band: **Die Theorie des Kreisels.** Mit 137 Abbildungen. XI, 281 Seiten. Gr.-8°. 1950. DM 30.—; Ganzleinen DM 33.—

Inhaltsübersicht: Einleitung. — Grundlagen: Grundlagen der Vektorrechnung. — Grundlagen der Mechanik. — Der Trägheitstensor. — Der symmetrische Kreisel: Der kräftefreie symmetrische Kreisel. — Die geführte Bewegung des symmetrischen Kreisels. — Der symmetrische Kreisel unter Zwang und Stoß. — Der schwere symmetrische Kreisel. — Der Einfluß der Reibung. — Der unsymmetrische Kreisel: Der kräftefreie unsymmetrische Kreisel. — Der schwere unsymmetrische Kreisel. — Besondere Probleme: Kreisel im erweiterten Sinne. Gyroskopische Systeme. — Darstellung der Kreiselbewegungen durch Thetafunktionen. Namen- und Sachverzeichnis.

Zweiter Band: **Die Anwendungen des Kreisels.** Mit 133 Abbildungen. VI, 268 Seiten. Gr.-8°. 1950. DM 30.—; Ganzleinen DM 33.—

Inhaltsübersicht: Kreiselwirkungen bei Radsätzen: Kollermühlen — Kritische Drehzahlen von Rotoren — Fahrzeuge — Flugzeuge. — Kreiselgeräte: Geräte mit Kompaßkreiseln — Der Kreiselkompaß — Künstliche Horizonte mit Pendelkreisen — Wendekreisel und Lagekreisel — Sonstige Kreiselgeräte. — Unmittelbare Stabilisatoren: Richtkreisel — Stützkreisel — Dämpfkreisel. — Namen- und Sachverzeichnis.

„Das Werk stellt in seiner neuen Auflage nach Inhalt und Form eine sehr weitgehende Neuschöpfung dar, deren Eigenart in einer kurzen Besprechung nur sehr unvollkommen gekennzeichnet werden kann. Besonders hervorzuheben ist der neu gestaltete Aufbau von den Grundlagen der Dynamik aus und die erzielte Klarheit und Anschaulichkeit des gesamten ausgedehnten Stoffgebietes, bei der in vielen Einzelheiten neue Gesichtspunkte und Zusammenhänge zum Ausdruck kommen. Ist es schon ein Beweis hoher Kunst, den großen Stoff in dieser Vollständigkeit in zwei schlanken Bänden unterzubringen, so muß auch auf die Art der Darstellung, die Diskussion der erhaltenen Ergebnisse und deren Veranschaulichung durch Schaubilder und Kurventafeln besonders hingewiesen werden. . . . *(Archiv der Mathematik)*

Stabilitätsprobleme der Elastostatik. Von Dr.-Ing. habil. **Alf Pflüger**, Professor an der Technischen Hochschule Hannover. Mit 389 Abbildungen. VIII, 339 Seiten. Gr.-8°. 1950. Ganzleinen DM 34.50

Inhaltsübersicht: Grundsätzliches über Stabilitätsprobleme. — Exakte Lösungen. — Kriterien für die Gleichgewichtsarten. — Zwei- und dreidimensionale Probleme. — Näherungsverfahren für Verzweigungsprobleme. — Gültigkeitsgrenzen des Näherungsverfahrens. — Näherungslösungen für Eigenwertprobleme. — Praktische Bedeutung der Stabilitätstheorie. — Anhang: Formelzusammenstellung für kritische Werte von Verzweigungsproblemen. — Literaturverzeichnis. — Sachverzeichnis.

„. . . Das Buch zeichnet sich durch einen außerordentlich anschaulichen und sorgfältigen Aufbau aus. Für den Praktiker wird besonders der letzte Abschnitt des Buches bedeutungsvoll sein, in dem von Widersprüchen zwischen Theorie und Versuch, von Abweichungen vom *Hooke*schen Gesetz und auch vom Wert der Theorie für die Anwendung gesprochen wird. ." *(Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens.)*

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Dynamik des Bogenträgers und Kreisringes. Von Dr. **Karl Federhofer**, Professor an der Technischen Hochschule Graz. Mit 35 Textabbildungen und 26 Zahlentafeln. XII, 179 Seiten. Gr.-8°. 1950 (W) Steif geheftet DM 23.—

Inhaltsübersicht: Kinematik der Biegung und Drillung des von Haus aus gekrümmten und tordierten Stabes. — Die Differentialgleichungen der Eigenschwingungen des räumlich schwingenden offenen Kreisbogens und ihre Randbedingungen. — Sonderfall des Kreisbogenträgers mit einfach-symmetrischem Querschnitt, dessen eine Hauptachse in der Kreisebene liegt. — Einfluß der Querschnittsform auf die Schwingungsgleichungen in den Sonderfällen des vorhergehenden Abschnittes. — Der Grenzfall des geraden Stabes. — Kreisbogenträger mit entlang der Bogenachse veränderlichem Querschnitte. — Einfluß eines radialen Außen- oder Innendruckes auf die Frequenzen eines Kreisbogenträgers und Kreisringes. — Der Kreisring mit dünnwandigem geschlossenem Hohlquerschnitt (Hohlreifen). — Frequenzen des Zweigelenk-Bogenträgers mit parabolischer Achse.

„. . .Das vorliegende Werk des bekannten Autors stellt im wesentlichen eine Erweiterung unserer Kenntnisse in der Schwingungsforschung dar. Wird doch im Gegensatz zu den bekannten Standardwerken über technische Schwingungsprobleme der Fall gekrümmter Stäbe einer eingehenden Behandlung unterzogen. Der Verfasser beschränkt sich aber nicht nur auf die allgemeine Behandlung der Probleme, sondern er ist bemüht, bis zur zahlenmäßigen Auswertung jedes Problems vorzudringen. So findet man auch die Näherungsverfahren in vollkommener Art durchgeführt, und es ist dem Leser möglich, mittels der zahlreichen Tabellen und Darstellungen jedes einschlägige Problem auch rasch überschlagsweise zu beurteilen." *(Acta Physica Austriaca.)*

SPRINGER-VERLAG IN WIEN I

Die Methode der Festpunkte.

Von **Ernst Suter.** Vereinfachtes Verfahren zur Berechnung statisch unbestimmter Konstruktionen mit Beispielen aus der Praxis, insbesondere von Stahlbetontragwerken. Dritte, neubearbeitete Auflage von Dipl.-Ing. **Ernst Traub.** Mit 232 Abbildungen und 7 Tafeln im Text. XII, 216 Seiten. Gr.-8°. 1951. Ganzleinen DM 21.—

Inhaltsübersicht: Einleitung. Allgemeines. Die *Mohr*schen Sätze. Graphische Bestimmung der Festpunkte für durchlaufende Träger. — Erster Abschnitt: Tragwerke mit unverschieblichen Knotenpunkten und mit von Stab zu Stab veränderlichem, aber auf Stablänge konstantem Trägheitsmoment: Das k-Verfahren zur Bestimmung der Festpunkte, Verteilungsmaße und Übergangszahlen. Das k-Verfahren zur Bestimmung der Kreuzlinienabschnitte und Momente infolge beliebiger Belastung des Tragwerkes. Rechnungsabschnitt I. Übersichtliche Zusammenstellung des Rechnungsvorganges. Bestimmung der Querkräfte, Normalkräfte und Auflagerkräfte. Bestimmung der Festhaltungskräfte. — Zweiter Abschnitt: Rechnungsabschnitt II. Tragwerke mit verschiebbaren Knotenpunkten und mit von Stab zu Stab veränderlichem, aber auf Stablänge konstantem Trägheitsmoment: Biegungsmomente infolge gegenseitiger Verschiebung der beiden Endpunkte eines Stabes und die zugehörige Erzeugungskraft, Tragwerke mit senkrechten Stielen und waagerechten Balken. Tragwerke mit schiefen Stielen oder schrägen Balken. — Dritter Abschnitt: Tragwerke mit auf Stablänge veränderlichem Trägheitsmoment: Das k-Verfahren zur Bestimmung der Festpunkte und Kreuzlinienabschnitte. Das Drehwinkel-Verfahren zur Bestimmung der Festpunkte und Kreuzlinienabschnitte. — Vierter Abschnitt: Grenzwerte der Momente und Querkräfte: Grenzwerte der Momente und Querkräfte für ständige Last und Nutzlast. Einflußlinien der Momente und Querkräfte für bewegliche Lasten. Momente infolge Temperaturänderung und Stützensenkung. — Fünfter Abschnitt: Hilfstafeln zur Bestimmung der Festpunkte und Kreuzlinienabschnitte, Momententafeln für durchlaufende Träger. — Sechster Abschnitt: Beispiele aus der Praxis.

„... Dem Studierenden wird in klar aufgebauter Darstellung, ohne Wiederholungen, alles Notwendige gesagt, wobei einige ganz durchgerechnete ‚Beispiele aus der Praxis' den Eingang in die praktische Anwendung der Methode erleichtern.... Das Buch kann jedem Rahmenstatiker und solchen, die es werden wollen, wärmstens empfohlen werden." *(Schweiz. Technische Zeitschrift.)*

Die Methoden der Rahmenstatik.

Aufbau, Zusammenfassung und Kritik. Von Dr.-Ing. habil. **Otto Luetkens.** Mit 38 Abbildungen und 9 Zahlentafeln. VII, 281 Seiten. Gr.-8°. 1949. DM 33.—; Ganzleinen DM 36.—

Inhaltsübersicht: Einleitung. — I. Grundlagen der Berechnung: A. Einführung einheitlicher Bezeichnungen. B. Beziehung zwischen Kräften und Formänderung. C. Aufstellung der Elastizitätsgleichungen. D. Auflösung der Elastizitätsgleichungen. E. Umordnung. — II. Beschreibung der statischen Verfahren: A. Daten des Systems der Vergleichsrechnung. B. Verfahren am Hauptsystem A. C. Verfahren am Hauptsystem B. D. Verfahren am Hauptsystem C. — III. Eignung der Verfahren: A. Betrachtung der Grundlagen. B. Schlußfolgerung auf die Berechnung der einzelnen Arten von Systemen. — IV. Literaturverzeichnis. — V. Anhang, Tafeln A 1 bis A 9.

Die vorliegende Arbeit bezweckt nicht nur eine Zusammenfassung der statischen Verfahren, sondern auch einen Ausgleich zwischen den beiden Anschauungen, wonach die Rahmenstatik einerseits in der Lösung algebraischer Gleichungen, andererseits in der Auslegung statisch-geometrischer Zusammenhänge besteht.
Der Umfang der Arbeit beschränkt sich bewußt auf die einfachen Rahmensysteme mit geraden Stäben von stabweise konstanten Trägheitsmomenten und damit auf das praktische Bedürfnis für die Stabwerke im Hochbau. Der Hauptwert wurde nicht auf die Entwicklung „neuer" Methoden, sondern auf die gedankliche Zusammenfügung vorhandener Verfahren gelegt. Am Schluß dieses Buches befindet sich ein umfangreiches Schrifttumsverzeichnis.

Statik der rahmenartigen Tragwerke.

Von Prof. Dr.-Ing. **J. Pirlet,** Köln, ehem. Honorarprofessor der Technischen Hochschule Aachen. Mit 80 Abbildungen im Text und 5 Tafeln in 1 Tasche. VII, 168 Seiten. 8°. 1951. Ganzl. DM 24.—

Inhaltsübersicht: Erster Teil: Grundlagen der Berechnung rahmenartiger Tragwerke. Der elastisch eingespannte Stab. Das Stabgefüge. Der Knoten. Der Knotenstabzug. Die Einspanngrade ε, Berechnung der Einspannmomente M_i und M_k, d. h. der Unbekannten in einem Stabzugfelde l_i. Gleichungen für M_i und M_k bei einzelnen Belastungsarten. — Anhang: Zusammenstellungen der Ergebnisse. — Zweiter Teil: Der elastisch eingespannte kontinuierliche Balken in rahmenartigen Tragwerken. — Das Berechnungsverfahren. Einleitung. Die Einspanngrade ε. Die Einspannmomente M_i und M_k des beiderseits elastisch eingespannten Balkens. Die Einspannmomente M in kontinuierlichen Trägern. — Dritter Teil: Zahlenbeispiel. Von der Belastung unabhängige Werte. Von der Belastung abhängige Werte. — Sachverzeichnis.

„Der Verfasser bringt in seinem übersichtlich gehaltenen Buch ein Berechnungsverfahren für rahmenartige Tragwerke, das geeignet ist, dem praktischen Statiker die Arbeit bei der Bemessung dieser vielfach statisch unbestimmten Systeme wesentlich zu erleichtern. Hier wird ein Verfahren entwickelt, das zunächst in geschlossener Form genaue Ergebnisse unter der Voraussetzung der Unverschieblichkeit der Knotenpunkte und konstanter Querschnitte liefert. Es geht demnach im wesentlichen um den elastisch eingespannten Balken bzw. um den Durchlaufträger mit elastischer Einspannung der Knoten. Die gesuchten Momente werden als Funktion der „Einspanngrade" der Stäbe gefunden. In dem Umstand, daß das Ziel der Lösung die Einflußlinien sind, liegt der besondere Wert der Arbeit für die Praxis.
Anschließend an das strenge Verfahren wird eine Näherungsberechnung entwickelt und an Hand von Beispielen nachgewiesen, daß deren Ergebnisse für die meisten praktischen Fälle genau genug mit der exakten Lösung übereinstimmen. Tabellarischer Rechnungsgang, eine größere Anzahl von Formeln für Sonderbelastungsfälle und Zahlenbeispiele erleichtern das praktische Rechnen.
Die Art der behandelten Tragwerke bringt es mit sich, daß das Buch zunächst in erster Linie den Stahlbetonstatiker anspricht. Da das Verfahren aber geeignet ist, als Grundlage für die Berechnung der eigentlichen Rahmentragwerke zu dienen und der Verfasser eine spätere Erweiterung seines Werkes in dieser Richtung in Aussicht stellt, ist die Arbeit eine willkommene Bereicherung des Rüstzeuges für die gesamte Statik." *(Zeitschrift des österreichischen Ingenieur- u. Architekten-Vereins)*

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Einflußfelder elastischer Platten.

Von Dipl.-Ing. Prof. Dr. techn. **Adolf Pucher,** Graz. 52 Tafeln mit VIII, 13 Seiten Text und 10 Textabbildungen. Quer-4°. 1951. (W) Ganzleinen DM 27.70

„... Das vorliegende Werk dürfte eine begrüßenswerte Bereicherung des Hilfsmittel für die schnelle Berechnung von isotropen Platten sein und wird u. a. bei der nach der neuen DIN 1075 geforderten Berechnung von Fahrbahnplatten nach der Plattentheorie wertvolle Dienste leisten. Das gut ausgestattete Buch kann daher bestens empfohlen werden." *(Der Bauingenieur)*

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

Diesem Heft liegen 2 Prospekte des Springer-Verlages, Berlin·Göttingen·Heidelberg und 1 Prospekt des Springer-Verlages, Wien, bei.

Springer-Verlag / Berlin·Göttingen·Heidelberg. Printed in Germany, W 57 275 4022 0,85 KB./Z. 040.